П. Т. АПАНАСОВ
Н. П. АПАНАСОВ

СБОРНИК МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ПРАКТИЧЕСКИМ СОДЕРЖАНИЕМ

П. Т. АПАНАСОВ
Н. П. АПАНАСОВ

СБОРНИК МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

С ПРАКТИЧЕСКИМ СОДЕРЖАНИЕМ

Книга для учителя

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1987

ББК 74.262
А76

Рецензенты:
доктор физ.-мат. наук, профессор, чл.-кор. АПН СССР И. С. Бровиков;
учитель математики школы № 415 Москвы Е. Н. Турецкий

Апанасов П. Т., Апанасов Н. П.

А76 Сборник математических задач с практическим содержанием: Кн. для учителя.— М.: Просвещение, 1987.— 110 с.

В книге представлен большой набор задач с практическим содержанием: экономического характера, отражающих проблемы сохранения окружающей среды, взятых из смежных с математикой учебных предметов — физики, химии, географии и т. д.

А $\frac{4306010000-756}{103(03)-87}$ 132-87 ББК 74.262

ПРЕДИСЛОВИЕ

Математические задачи с практическим содержанием — это такие задачи, которые связаны с применением математики в технике, физике, химии, экономике, биологии, медицине, а также в быту.

Книга состоит из двух глав, разбитых на параграфы.

Задачи первой главы познакомят учащихся с приложениями математики в физике и технике, задачи второй главы — с приложениями математики в экономике. Эти задачи не совсем обычны как по форме изложения, так и по применяемым методам решения.

Каждый параграф содержит сводку основных формул, используемых при решении задач, и начинается с разбора типичных примеров. Задачи, отмеченные звездочкой (*), являются более сложными и адресованы учащимся, увлекающимся математикой. Такие задачи снабжены подробными решениями.

При составлении задач авторы использовали материалы из «Основных направлений экономического и социального развития СССР на 1986—1990 годы и на период до 2000 года», а также статистические данные об экономическом и социальном развитии страны в предыдущих пятилетках.

Следует отметить, что авторы не стремились подбирать числовые данные в задачах с целью упрощения вычислений, так как это противоречило бы практической направленности задач. Поэтому при решении некоторых задач учащимся приходится проводить довольно громоздкие вычисления. Такие задачи рекомендуется решать, применяя правила приближенных вычислений. Рекомендуется также использовать микрокалькуляторы, что будет способствовать приобретению навыков работы с ними.

Предлагаемые в книге задачи помогут учителю в иллюстрации математических фактов и обосновании того значения, которое имеет внедрение достижений передовой науки, новой технологии и научной организации труда в промышленном и сельскохозяйственном производстве, а также в повышении производительности труда, снижении себестоимости продукции, режиме экономии, снижении материалоемкости и энергоемкости производства продукции, повышении качества производимой продукции.

Авторы надеются, что решение математических задач с практическим содержанием будет способствовать развитию интереса учащихся к экономическим знаниям, тем самым формированию у учащихся коммунистического отношения к труду, социальной и трудовой активности.

Все критические замечания и предложения по данной книге просим направлять по адресу: 129846, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41. Издательство «Просвещение». Редакция математики.

Авторы

Глава I

ЗАДАЧИ С ПРАКТИЧЕСКИМ СОДЕРЖАНИЕМ

§ 1. ДИАГРАММЫ. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ДИАГРАММЫ

Диаграммы бывают трех видов: столбчатые, круговые, графические.

Пример. Построить диаграмму производства электроэнергии в СССР, если известно, что было произведено (в млрд. кВт/ч) в:

1928 г. — 5,0	1960 г. — 292,3
1940 г. — 48,3	1970 г. — 741,0
1950 г. — 91,2	1980 г. — 1295

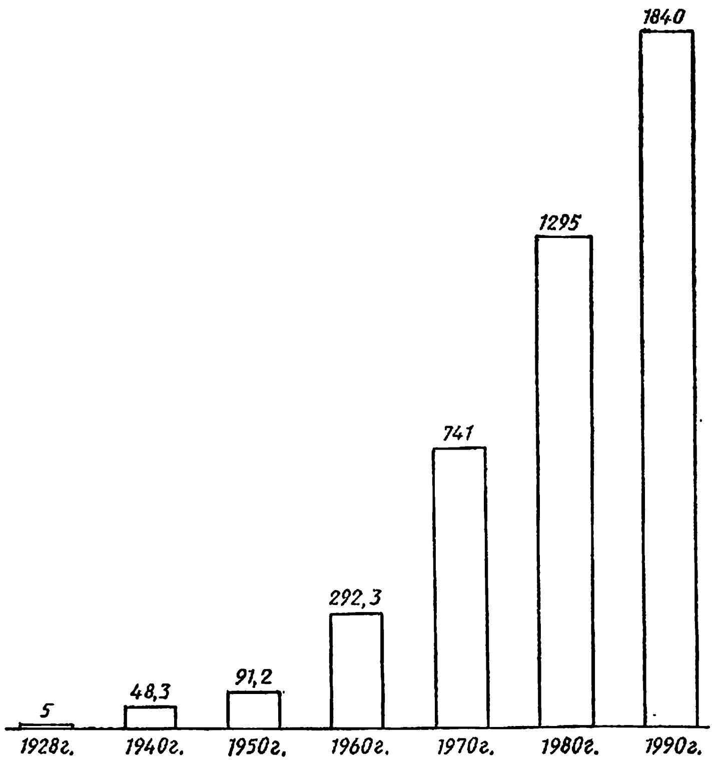

Рис. 1, *а*

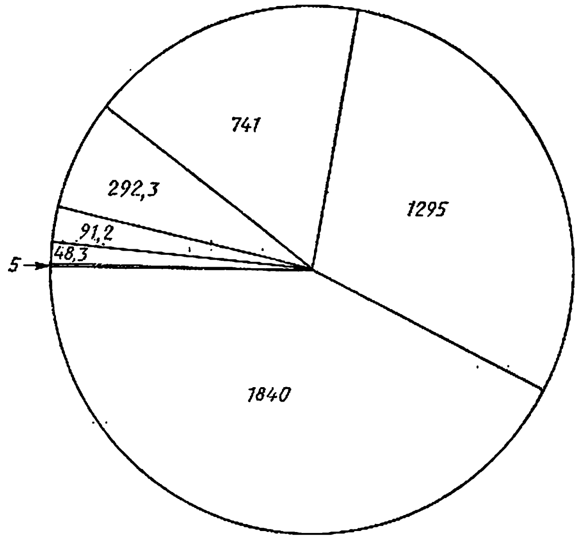

Рис. 1, *б*

В 1990 г. должны произвести 1840 млрд. кВт/ч электроэнергии (нижняя граница плана XII пятилетки).

Решение. 1) Построим столбчатую диаграмму (рис. 1, *а*). Изобразим 7 столбиков, высота каждого из которых прямо пропорциональна производству электроэнергии в соответствующие годы.

Пусть 1 мм высоты столбика соответствует 10 млрд. кВт/ч. Тогда высота столбика (в мм) диаграммы за:

1928 г.	равна	0,5		1970 г.	»	74,1
1940 г.	»	4,8		1980 г.	»	129,5
1950 г.	»	9,1		1990 г.	»	184
1960 г.	»	28,2				

2) Построим круговую диаграмму (рис. 1, *б*).

Найдем сумму электроэнергии, произведенной за все эти годы:

$$5{,}0+48{,}3+91{,}2+292{,}3+741{,}0+1295+1840=$$
$$=4312{,}8 \text{ (млрд. кВт/ч).}$$

Найдем, сколько электроэнергии (в млрд. кВт/ч) соответствует 1° центрального угла:

$$4312{,}8:360\approx 11{,}98\approx 12.$$

Следовательно, центральный угол в 1° соответствует приблизительно 12 млрд. кВт/ч.

Производству электроэнергии в:

1928 г.	соответствует	угол	$5:12\approx 0{,}42°$
1940 г.	»	»	$48{,}3:12\approx 4°$
1950 г.	»	»	$91{,}2:12\approx 7{,}5°$
1960 г.	»	»	$292{,}3:12\approx 24{,}4°$
1970 г.	»	»	$741:12\approx 61{,}8°$
1980 г.	»	»	$1295:12\approx 107{,}9°$
1990 г.	»	»	$1840:12\approx 153{,}3°$

3) Построим графическую диаграмму (рис. 1, *в*).

На координатной плоскости, используя данные для построения столбчатой диаграммы, построим график производства электроэнергии в СССР. Для этого по оси абсцисс отложим годы, за которые была произведена электроэнергия, а по оси ординат—ее количество за эти годы.

Задачи.

1. Построить диаграмму роста добычи нефти (в млн. т) в СССР, если было добыто в:

1913 г.—9,3	1960 г.—147,9
1928 г.—11,6	1970 г.—349,9
1940 г.—31,1	1980 г.—603

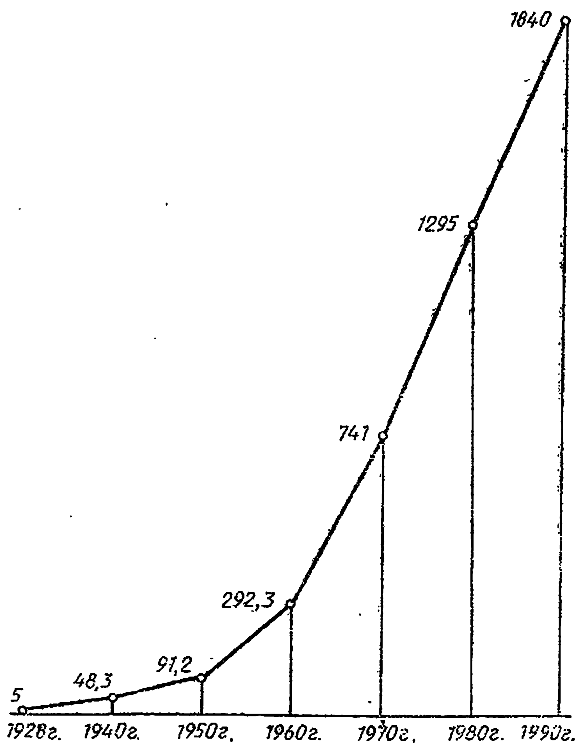

Рис. 1, *в*

В 1990 г. нефти будет добыто 625 млн. т (нижняя граница плана XII пятилетки).

2. Построить диаграмму роста производства в СССР овощных культур на душу населения (в кг), если известно, что произведено в:

1913 г. — 40	1970 г. — 92
1965 г. — 72	1975 г. — 87

В 1990 г. будет произведено 140 кг[1] овощных культур на душу населения.

3. Построить диаграмму роста производства в СССР мяса и мясопродуктов в пересчете на мясо (включая сало и субпродукты в натуре) на душу населения (в кг), если известно, что произведено в:

1913 г. — 29	1970 г. — 48
1965 г. — 41	1975 г. — 58

В 1990 году будет произведено 71[1] кг продуктов.

4. Построить диаграмму роста добычи угля в СССР (в млн. т), если известно, что было добыто в:

1913 г. — 29,1	
1928 г. — 35,5	1960 г. — 531
1940 г. — 165,8	1970 г. — 626
1950 г. — 261	1980 г. — 716

В 1990 г. будет добыто 800 млн. т угля за счет повышения производительности труда.

5. Построить диаграмму роста производства картофеля на душу населения в СССР (в кг), если известно, что было произведено в:

1913 г. — 114	1970 г. — 130
1965 г. — 142	1975 г. — 120

В 1990 г. будет произведено 31,1 кг картофеля на душу населения.

6. Построить диаграмму роста производства молока и молочных продуктов в СССР в пересчете на молоко на душу населения (в кг), если известно, что было произведено молока в:

1913 г. — 154	1970 г. — 307
1965 г. — 251	1975 г. — 315

В 1990 г. будет произведено 349 кг молока на душу населения.

7. Построить диаграмму роста производства в СССР яиц на душу населения (в шт.), если известно, что было произведено в:

---

[1] Используемые здесь статистические данные производства овощей и бахчевых культур, мяса и мясопродуктов на душу населения на 1990 г. получены путем деления плана их производства на 292 млн. человек.

1913 г.—48	1970 г.—159
1965 г.—124	1975 г.—215

В 1990 г. будет произведено 282 шт. яиц на душу населения.

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнение вида $ax+b=0$, где $a\neq 0$, a и b—действительные числа, x—переменная величина, называется линейным.

Эта тема довольно подробно изучается в курсе алгебры, поэтому мы ограничимся тем, что укажем задачи, отражающие уровень требований к знаниям учащихся.

Упражнения.

Решить уравнения:

а) $23x-10-7x-4=3$;

б) $\frac{x-2}{2}-\frac{3x-3}{12}=0$;

в) $7x+5-52x+1=82-7x$;

г) $\frac{4x-3}{3}-\frac{6x-1}{5}=\frac{4-2x}{3}-\frac{3}{5}$;

д) $\frac{2x-7}{3}+\frac{4x-12}{6}=\frac{3x-12}{2}+1$.

§ 2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

Относительно того, как составлять уравнения по условию математической задачи с практическим содержанием, нельзя дать каких-либо точных правил, которые позволяли бы решить любую задачу. Однако можно использовать некоторые указания общего характера, приводимые ниже.

1) Сначала нужно осуществить выбор неизвестной величины, входящей в условие задачи, относительно которой будет составляться уравнение. По возможности следует выбрать искомую величину. Но иногда бывает более выгодно выбрать какую-либо другую неизвестную величину, связанную с искомой, так как удачный выбор неизвестной величины упрощает процедуру составления уравнения. Выбранную неизвестную величину следует обозначить буквой x или y и т. д.

2) Все однородные величины, фигурирующие в условии задачи, следует выражать в одних и тех же единицах. Например, нельзя единицу времени в одной и той же задаче давать одновременно в секундах, часах и т. д., а единицу длины—в сантиметрах, метрах, километрах и т. д.

3) Используя условие задачи, нужно определить все взаимосвязи между данными величинами, а затем на этой основе составить уравнение или систему уравнений, т. е. перейти от словесной формулировки к формальной математической записи.

4) В процессе решения составленного уравнения или составленной системы уравнений нужно всегда стремиться к отысканию оптимальных методов преобразования, так как это способствует повышению уровня техники математических преобразований.

5) Полученное решение системы уравнений проверить на предмет его соответствия условию задачи.

Пример. Завод выпускает станки A и B, которые имеют массу 2700 кг. Конструкторы после модернизации снизили массу каждого станка типа A на 7%, а типа B на 5%, и они вместе стали иметь массу 2535 кг. Найти: а) массу станков старой конструкции; б) снижение материалоемкости станков A и B; в) годовую экономию металла, если вместо старых станков завод в год будет выпускать по 5000 станков типа A и B новой конструкции.

Решение. Пусть x кг — масса станка типа A, тогда $(2700-x)$ кг — масса станка типа B.

Снижение материалоемкости станков типа A и B равно соответственно $\frac{x\cdot 7}{100}$ (кг) и $\frac{(2700-x)\cdot 5}{100}$ (кг).

Составляем уравнение:

$$\frac{7x}{100}+\frac{(2700-x)\cdot 5}{100}=2700-2535.$$

Решая его, найдем:

$$7x+13\,500-5x=16\,500,\quad 2x=3000,\quad x=1500.$$

Итак:

а) станок типа A имеет массу 1500 кг, а типа B —

$$2700-1500=1200\ (\text{кг});$$

б) массу станка типа A снизили на $\frac{1500\cdot 7}{100}=105$ (кг), а типа B — на $\frac{1200\cdot 5}{100}=60$ (кг);

в) годовая экономия от выпуска по 5000 станков в год составит

$$(105+60)\cdot 5000=825\,000\ (\text{кг})=825\ (\text{т}).$$

Задачи.

1. Имеется 36 л раствора 3%-ной азотной кислоты (HNO_3). Сколько литров раствора 6%-ной азотной кислоты надо влить в сосуд, чтобы после добавления воды получить 54 л раствора 5%-ной HNO_3?

2. В одном сосуде был 51 л 6%-ного раствора соли, в другом — 24 л 10%-ного раствора той же соли. Из каждого сосуда отлили одинаковое количество раствора соли. Взятое из первого сосуда количество раствора соли влили во второй, а взятое из второго — в первый. Сколько литров раствора было взято из каждого сосуда, если в сосудах оказался раствор одной и той же концентрации?

3*. Первый раствор состоит из цемента и песка в пропорции 3:4, второй раствор содержит цемента и песка в отношении 1:2. В каком массовом соотношении нужно взять первый и второй растворы, чтобы получить раствор, содержащий цемент и песок в отношении 15:22?

4. Межколхозный ремонтный завод за месяц отремонтировал 230 комбайнов и тракторов на сумму 62 000 р. Стоимость капитального ремонта трактора 300 р., комбайна 200 р. Сколько комбайнов и тракторов отремонтировал завод?

5. Для штукатурки наружной поверхности дома нужно приготовить цементно-известковый раствор марки 500 в объеме 2,4 $м^3$. Сколько потребуется цемента, известкового теста и песка, если объемное отношение их соответственно равно 1:2:9? (Отношение компонентов раствора берется в единицах объема.)

6*. Имеются два сплава меди и олова, первый из которых содержит меди 40%, второй — 32%. Какой массы нужно взять слитки каждого сплава, чтобы после их совместной переплавки получить 16 кг сплава, содержащего 35% меди?

7. Один рабочий выполняет некоторую работу за m дней, другой ту же работу может выполнить за n дней. За сколько дней будет выполнена эта работа при совместной работе обоих рабочих?

8. Завод производит 20 000 радиоприемников первого и второго классов. Улучшив технологию производства, завод увеличил выпуск приемников первого класса на 20%, второго — на 8%, и потому общий выпуск продукции увеличился на 2200 шт. Сколько приемников первого и второго классов выпускал завод до и после улучшения технологии производства?

9. Завод производил машины типов A и B в количестве 5000 шт. в год на сумму 9 млн. р. Усовершенствовав технологию производства, завод увеличил выпуск машин типа A на 6%, типа B на 4%, тем самым увеличил общий выпуск машин на 480 тыс. р. На сколько рублей машин типов A и B выпускал завод до и после усовершенствования технологии производства?

§ 3. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ И СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Уравнение вида $ax+by=c$, где a, b, c — действительные числа; x, y — переменные величины, называется линейным уравнением с двумя неизвестными.

Решение такого уравнения тесно связано с линейной функцией, графиком которой на координатной плоскости служит прямая линия. Рассмотрим пример задачи, которая может быть решена путем построения графиков линейной функции.

Пример. Первый цех ежемесячно производит $y=10x$ условных единиц продукции и выполняет годовой план выпуска продукции. Второй цех первые три месяца года проводил реконструкцию и после этого ежемесячно стал производить $y=15x$ условных единиц продукции. Определить графически, выполнит ли второй цех годовой план производства продукции. Какой цех произвел продукции больше за этот год?

Решение. Построим на одной координатной плоскости графики функций: $y_1=10x$ и $y_2=15x$ (рис. 2). По оси x отложим число месяцев, а по оси y — условные единицы продукции. Как видно из графиков этих функций:

$$\begin{cases} 15x(12-3)=135x, \\ 10x\cdot 12=120x, \end{cases}$$

второй цех не только выполнит годовой план, но на $15x$ условных единиц перевыполнит его.

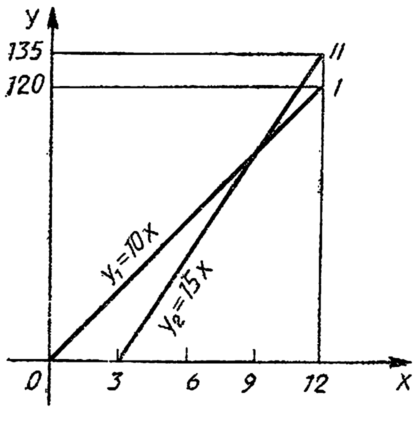

Рис. 2

ЗАДАЧИ НА СОСТАВЛЕНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Задачи на составление систем уравнений решаются так же, как и задачи на составление уравнений с одним неизвестным (см. § 2). Нужно объяснить учащимся, что их можно решить и с помощью уравнения первой степени с одним неизвестным. Однако введение двух или более неизвестных часто упрощает решение задачи. Рассмотрим пример решения задачи на составление системы уравнений.

Пример. В бригаде было 5 рабочих и 7 учащихся. За 5 рабочих дней бригада изготовила 850 деталей. Вступив в предпраздничное соревнование, рабочие повысили производительность труда на 20%, а учащиеся — на 10%, и поэтому за следующие 5 рабочих дней бригада изготовила 985 деталей. Найти дневную производительность труда до соревнования и в период соревнования.

Решение. Пусть x деталей — средняя дневная производительность труда рабочего до соревнования, а y деталей — учащегося; тогда за 5 дней 5 рабочих изготовили $25x$ деталей, а 7 учащихся — $35y$ деталей.

Из условия задачи следует, что

$$25x+35y=850. \qquad (1)$$

Поскольку в период соревнования рабочие повысили производительность труда на 20%, а учащиеся — на 10%, то за 5 дней рабочие изготовили $\left(25x+\frac{25x}{100}\cdot 20\right)$ деталей, а учащиеся — $\left(35y+\frac{35y}{100}\cdot 10\right)$ деталей. Следовательно,

$$\left(25x+\frac{25x}{100}\cdot 20\right)+\left(35y+\frac{35y}{100}\cdot 10\right)=985.$$

Упростив это уравнение, получим:

$$30x+38{,}5y=985. \qquad (2)$$

Уравнения (1) и (2) объединим в систему:

$$\begin{cases} 25x+35y=850, \\ 30x+38{,}5y=985. \end{cases}$$

Из первого уравнения выразим x через y: $x=\frac{170-7y}{5}$. Подставив значение x во второе уравнение, найдем y:

$$30\cdot\frac{170-7y}{5}+38{,}5y=985,$$

$$1020-42y+38{,}5y=985,\quad 3{,}5y=35,\quad y=10.$$

Так как $x=\frac{170-7y}{5}$, то $x=\frac{170-7\cdot10}{5}=20$.

Таким образом, до соревнования производительность труда рабочих и учащихся была равна соответственно 20 и 10 деталей, а в период соревнования $20+\frac{20}{100}\cdot20=24$ (дет.), $10+\frac{10}{100}\cdot10=$ $=11$ (дет.).

Упражнения.

Решить системы уравнений:

а) $\begin{cases} 7y+3x-9=3, \\ 2y-3x=15; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3(3x+4y)-2(5y+3x)=5, \\ 5x+6y=3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 4y+2-\frac{5x-6y}{13}=3x, \\ 2y+\frac{6y-5x}{6}=\frac{2y-3x}{4}-12; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \frac{3x-5}{2}-\frac{2x-y}{3}+\frac{x+6y}{6}=3\frac{1}{2}, \\ 4-\frac{x+2y}{4}+\frac{4y-5x}{2}=\frac{6y-3x}{4}. \end{cases}$

Решить графически системы уравнений:

а) $\begin{cases} 5x-4y=7, \\ 3y-x=3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4y-x=4; \\ \frac{3y-x}{2}+3=\frac{3x-2y}{3}. \end{cases}$

Задачи.

1. Для строительства объекта требуется раствор цемента двух видов в объемах, соответственно равных 200 и 550 м^3. Найти, сколько требуется цемента и песка, если для второго вида раствора цемента расходуется в 2 раза больше, а песка — в 3 раза. (Объемом воды, используемой для приготовления раствора, пренебрегли.)

2. Сплав меди и цинка содержит меди на 2 кг больше, чем цинка. После выделения из сплава $\frac{6}{7}$ меди и 60% цинка масса сплава оказалась равной 3 кг. Найти начальную массу сплава.

3. Токарь и его ученик должны были вместе за смену изготовлять 130 деталей. Рабочий перевыполнил план на 10%, а ученик — на 20%, и они вместе изготовили 148 деталей. Сколько

деталей каждый из них должен был изготовлять до повышения производительности труда?

4. На ткань первого сорта розничная цена была снижена на 10%, а на ткань второго сорта — на 15%. За 6 м ткани первого сорта и 10 м ткани второго сорта покупатель уплатил 261 р. Сколько он уплатил бы за эту покупку до снижения цен, если ткань первого сорта стоит на 2 р. за метр дороже, чем ткань второго сорта?

5. Две ученические бригады токарей за смену производят 245 деталей. В первой бригаде 6 человек, во второй — 5 человек. После внедрения научной организации труда (НОТ) первая бригада повысила производительность труда на 15%, а вторая — на 20% и за смену они стали производить 288 деталей. Найти производительность труда одного ученика первой и второй бригад до и после внедрения НОТ.

6*. Тело массой m, изготовленное из сплава двух металлов, при полном погружении в воду выталкивается с силой $\overline{a}$. Кусок первого металла такой же массы m выталкивается из воды с силой $\overline{b}$, а второго — с силой $\overline{c}$. Найти массы m_1 и m_2 составляющих сплав металлов.

§ 4. КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ И УРАВНЕНИЯ, ПРИВОДИМЫЕ К КВАДРАТНЫМ

Квадратным уравнением называется уравнение вида ax^2+bx+ $+c=0$, где a, b, c — действительные числа, $a \neq 0$. Корни квадратного уравнения определяются по формуле

$$x_{1,2}=\frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},$$

где $D=b^2-4ac$.

Все, что было сказано в § 2 о составлении и решении задач на линейные уравнения, относится и к решению задач на составление квадратных уравнений. Рассмотрим пример решения задачи на составление квадратного уравнения.

Пример. В колхозе «Путь коммунизма» в 1980 г. получили средний урожай пшеницы на 21 ц с гектара больше, чем собирали крестьяне до революции, причем в 1980 г. получили 30 ц с площади, на 8,75 га меньшей той, с которой до революции тоже собирали 30 ц. Найти средний урожай пшеницы, собранный с одного гектара до революции и в 1980 г.

Решение. Пусть x ц/га — средний урожай пшеницы с 1 га, собранный до революции. Тогда $(x+21)$ ц/га — урожай пшеницы с одного гектара, собранный в 1980 г.

$\frac{30}{x}$ га — площадь посева, с которой до революции крестьяне собирали урожай.

$\left(30\cdot\frac{30}{x+21}\right)$ га — площадь посева, с которой собрали колхозники 30 ц/га в 1980 г. По условию задачи эта площадь на 8,75 га меньше.

Составим уравнение:

$$\frac{30}{x}-\frac{30}{x+21}=8\frac{3}{4}.$$

Решим его:

$$\frac{30}{x}-\frac{30}{x+21}=\frac{35}{4},$$

$$4(x+21)\cdot 30-4\cdot x\cdot 30=35x(x+21),$$

$$24x+504-24x=7x^2+147x,$$

$$7x^2+147x-504=0.$$

$D=147^2-4\cdot 7(-504)=21\,609+14\,112=35\,721$, следовательно,

$$x_{1,2}=\frac{-147\pm\sqrt{35721}}{14}=\frac{-147\pm 189}{14},\quad x_1=3,\quad x_2=-84.$$

Последнее значение не удовлетворяет условию задачи. Итак, средний урожай пшеницы составил до революции 3 ц/га, а в 1980 г. — 24 ц/га.

Упражнения.

а) $x^2-3x-28=0$;

б) $\frac{x+3}{x+2}+\frac{x-3}{x-2}-\frac{2x-3}{x-1}=0$;

в) $3x^2+x-10=0$;

г) $\frac{1+x^3}{(1+x)^2}+\frac{1-x^3}{(1-x)^2}=4$.

Задачи.

1. Сад имеет форму прямоугольника, одна сторона которого на 30 м больше другой. Найти длину и ширину сада, если его площадь равна 1,3 га.

2. В 1990 г. в СССР должны произвести некоторое количество химических средств защиты растений (в тыс. т). Если от этого количества вычесть 450 тыс. т и разность возвести в квадрат, то получим 400 тыс. т. Сколько тысяч тонн химических средств защиты растений должны произвести в 1990 г.?

3. В лесосеке было 200 000 м³ древесины. Количество древесины последовательно возрастает каждый год на одно и то же число процентов, в результате чего через два года оно составило 212 180 м³. Найти ежегодный прирост древесины в процентах.

4. При постройке сооружения требовалось вынуть 8000 м³ грунта в определенный срок. Работа была закончена раньше срока на 8 дней, так как бригада землекопов ежедневно перевыполняла план на 50 м³. Найти, в какой срок бригада должна была закончить работу, и найти ежедневный процент перевыполнения.

5*. Бригада проходчиков туннеля на строительстве БАМа по плану должна была за несколько дней вынуть 216 м³ скальной породы. Первые три дня бригада работала по плану, а затем ежедневно перевыполняла план на 8 $м^3$ и за день до срока выработала на 232 $м^3$ больше запланированного. Найти, сколько кубометров скальной породы должны были вынимать за день по плану.

6. В колхозе собрали 60 000 т пшеницы. В течение двух лет, улучшая агрономическую культуру сельскохозяйственных работ, колхоз добился равномерного повышения процента роста урожая и довел через два года сбор пшеницы до 64 896 т. Найти ежегодный прирост урожая пшеницы в процентах.

7. В электрической цепи напряжение равно 10 В, а сила тока на 1 А больше силы тока в другой цепи с напряжением 6 В. Если уменьшить сопротивление каждой цепи на 0,5 Ом, то разность силы тока в первой и второй цепи станет равна $\frac{2}{3}$ А. Найти эти силы токов.

Указание. $I=\frac{U}{R}$, где I — сила тока, U — напряжение, R — сопротивление.

8. Для лесозащитных насаждений отведена полоса длиной 24 км и шириной 50 м. По нормам лесопосадки (измеряемым в человеко-днях) 18 человек должны закончить работу к назначенному сроку. Но, увеличив дневную норму на $\frac{1}{3}$ га за человеко-день, 15 рабочих кончили посадку на два дня раньше намеченного срока. Какую площадь предполагалось засаживать за один день одному рабочему и сколько засаживали в действительности?

9*. Два крана, работая вместе, разгрузили баржу за t часов. За какое время может разгрузить баржу каждый кран в отдельности, если один из них тратит на это на n часов меньше другого?

10. Нужно огородить участок земли прямоугольной формы площадью 3 га, одна из смежных сторон участка больше другой на 50 м. Сколько столбов и сколько упаковок штакетника будет израсходовано, если столбы ставятся через 3,5 м, а на 1 погонный метр изгороди расходуется 7 штакетников (1 упаковка — 100 шт.)?

11. Если колхоз на рынке продаст мясо на сумму, равную 2688 р., то получит столько процентов прибыли, сколько сотен рублей содержится в половине себестоимости мяса. Найти себестоимость 1 кг мяса.

12. Предполагалось посадить 22,5 т картофеля, но выяснилось, что семена картофеля более высокого качества и поэтому можно уменьшить норму посадки на 125 кг на гектар. Найти плановую норму посадки картофеля на 1 га, если данным количеством картофеля засадили на 2,5 га больше, чем предполагалось.

13*. Два куска латуни имеют массу 60 кг. В одном куске чистой меди содержится 10 кг, а в другом — 8 кг. Сколько процентов меди содержит первый кусок латуни, если второй содержит меди на 15% больше первого?

14. Сила электрического тока в цепи с напряжением 100 В на 10 А больше силы тока в другой цепи с напряжением 60 В.

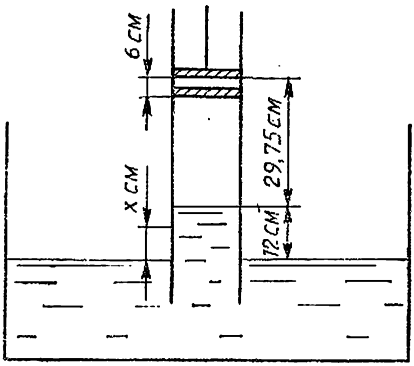

Рис. 3

Если сопротивление каждой цепи уменьшить на 5 Ом, то разность сил токов в первой и второй цепи будет равна $6\frac{2}{3}$ А. Найти силу тока в каждой цепи.

15*. В совхозе «Чаинский» общий удой молока в 1975 г. составил 820 т, а в совхозе «Коломинский» при одинаковых производственных условиях — 1050 т, причем коров в этом совхозе на 60 голов меньше, чем в совхозе «Чаинский». Средний годовой удой молока от коровы в совхозе «Коломинский» на 1 т больше. Найти поголовье коров в каждом совхозе и средний годовой удой молока на одну корову.

16. Из заготовки квадратной формы со стороной 60 см рабочий должен сделать деталь, имеющую форму правильного 8-угольника. Найти длины катетов отрезаемых по углам равнобедренных прямоугольных треугольников.

17. Из листового железа прямоугольной формы сделана открытая сверху коробка таким образом, что по углам листа вырезали квадраты со стороной 10 см и получившиеся края загнули. Найти размер листа, если длина его вдвое больше ширины и если объем коробки 40 000 см^3.

18. Чтобы полностью отремонтировать шоссе, два студенческих отряда работали вместе 5,5 дня, а потом второй отряд работал еще 1,5 дня. За сколько дней мог бы отремонтировать это шоссе каждый отряд в отдельности, если первый отряд может отремонтировать его на 3 дня быстрее, чем второй?

19*. Цилиндрическая трубка, в которой ходит поршень, погружена в чашку с ртутью. Ртуть в трубке стоит на 12 см выше ее уровня в чашке, а высота столбика воздуха в трубке над ртутью (до поршня) 29,75 см. Поршень опускают на 6 см. Какова будет в таком случае высота столбика ртути в трубке, если наружное давление воздуха равно 76 см ртутного столба (рис. 3)?

§ 5. ЛИНЕЙНЫЕ НЕРАВЕНСТВА С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Задачи на составление линейных неравенств и систем линейных неравенств решаются так же, как и задачи на составление линейных уравнений (см. § 2).

Рассмотрим решения задач на составление неравенств и систем неравенств.

Пример 1. Сторона земельного участка прямоугольной формы 600 м. Какой должна быть другая сторона участка, чтобы

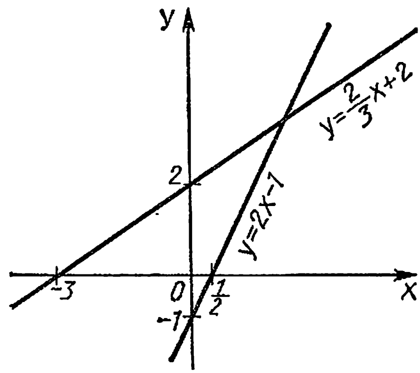

Рис. 4

его периметр был меньше периметра квадратного земельного участка со стороной 400 м?

Решение. Пусть x — неизвестная сторона земельного участка. Так как противоположные стороны прямоугольника равны, то получим неравенство

$$600 \cdot 2 + 2x < 400 \cdot 4.$$

Решая его, найдем $1200 + 2x < 1600$, $2x < 400$, откуда $x < 200$.

Пример 2. На рисунке 4 даны графики функций $y = 2x - 1$ и $y = \frac{2}{3}x + 2$. Пользуясь графиками, найти множество значений переменной x, при которых обе функции принимают положительные значения. Проверить правильность ответа, составив систему неравенств и решив ее алгебраически.

Решение. Из рисунка 4 следует, что функция $y = \frac{2}{3}x + 2$ больше нуля при $x > -3$, а функция $y = 2x - 1$ больше нуля при $x > \frac{1}{2}$. Поэтому обе функции будут больше нуля при $x > \frac{1}{2}$.

Решим задачу алгебраически, составив систему уравнений:
$\begin{cases} \frac{2}{3}x + 2 > 0, \\ 2x - 1 > 0, \end{cases}$ $\begin{cases} 2x + 6 > 0, \\ 2x > 1, \end{cases}$ $\begin{cases} 2x > -6, \\ x > \frac{1}{2}, \end{cases}$ $\begin{cases} x > -3, \\ x > \frac{1}{2}, \end{cases}$ следовательно, $x > \frac{1}{2}$.

Задачи.

1. Смешали 24 кг одного товара и 20 кг другого. Килограмм первого товара стоит 1 р. 60 к., а стоимость 1 кг смеси больше 1 р. 40 к., но меньше 1 р. 80 к. Какова стоимость второго товара?

2. Если пионерский отряд будет проходить в день на 5 км больше запланированного, то за 6 дней отряд пройдет более чем 90 км. Если же он будет проходить в день на 5 км меньше запланированного, то за 8 дней он пройдет меньше чем 90 км. Сколько километров в день проходит отряд?

3*. С поезда сошли два пассажира и направились одновременно в один и тот же пункт. Первый половину времени шел со скоростью a, а вторую половину времени — со скоростью b. Второй пассажир шел первую половину пути со скоростью a, а вторую — со скоростью b. Кто из них первым пришел в пункт назначения?

4. Если бы велосипедист проезжал в день на 5 км больше, чем в действительности, то за 6 дней он проехал бы меньше 400 км. Если бы он проезжал на 10 км меньше, чем на самом деле, то за 12 дней он проехал бы более 400 км. Сколько километров проезжал в день велосипедист?

5*. Один рабочий в день изготовляет на 5 деталей больше, чем второй. Если первый будет каждый день изготовлять на одну деталь, а второй на 9 деталей больше, чем они изготовляют, то за 6 дней первый изготовит столько деталей, сколько обрабатывает второй за a полных дней. Сколько деталей изготовляет каждый рабочий в день?

6. Построить графики функций $y=\frac{1}{2}x-1$ и $y=x+3$. Пользуясь графиками, найти множество значений переменной x, при которых обе функции имеют положительные значения. Проверить правильность ответа, составив систему неравенств и решив ее алгебраически.

§ 6. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ

Система уравнений вида

$$\begin{cases} ax^2+bxy+cy^2+dx+ky+f=0, \\ mx+ny+p=0, \end{cases}$$

где a, b, c, d, k, f, m, n, p — коэффициенты (причем a, b, c, m, n одновременно не могут равняться нулю); x, y — переменные, называется системой уравнений второй степени.

Основной способ решения такой системы — способ подстановки.

Задачи на составление системы уравнений второй степени решаются так же, как задачи на составление линейных уравнений (см. § 2) и системы линейных уравнений.

Рассмотрим решение задач на составление системы нелинейных уравнений.

Пример 1. По плану XII пятилетки в 1990 г. в СССР должны добыть некоторое количество (в млн. т) нефти. Если бы план добычи нефти в 1985 г. увеличили на 336 млн. т, то добыли бы такое количество, которое равно квадрату количества добытой нефти в 1940 г., а если бы в 1940 г. нефти добыли на 31,5 млн. т больше, то добыли бы 10% количества нефти по плану 1990 г. Найти: а) на сколько миллионов тонн нефти в 1990 г. добудут больше, чем в 1940 г.; б) во сколько раз в 1990 г. нефти добудут больше, чем в 1940 г.

Решение. Пусть x млн. т — добыча нефти по плану на 1990 г., y млн. т — количество добытой нефти в 1940 г. Тогда по условию задачи

$$x + 336 = y^2, \quad (1)$$

$$y + 31,5 = 0,1x. \quad (2)$$

Объединим уравнения (1) и (2) в систему:

$$\begin{cases} x + 336 = y^2, \\ y + 31,5 = \frac{x}{10}. \end{cases}$$

Из второго уравнения $x = 10y + 315$. Подставим это значение x в первое уравнение, получим:

$$10y + 315 + 336 = y^2, \quad y^2 - 10y - 651 = 0,$$

$$y_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25 + 651} = 5 \pm \sqrt{676} = 5 \pm 26, \quad y_1 = 31, \quad y_2 = -21.$$

Последнее значение не удовлетворяет условию задачи. Найдем теперь x: $31 + 31,5 = \frac{x}{10}$, $x = 625$.

Ответ: а) $625 - 31 = 594$ (млн. т);
б) $625 : 31 \approx 20,2$ (млн. т).

Пример 2. На двух прямоугольных участках земли посажено рядами 350 плодовых деревьев, причем оказалось, что на каждом участке число рядов на один больше числа деревьев в ряду. Какое количество деревьев было посажено в каждом ряду на том и другом участках, если на первом из них было на 130 деревьев больше, чем на втором?

Решение. Пусть x — число деревьев на первом участке, а y — число деревьев на втором. Тогда число рядов на первом участке $x + 1$, а на втором $y + 1$. Следовательно, $x(x + 1)$ — количество деревьев на первом участке, а $y(y + 1)$ — на втором. Из условия задачи получим систему уравнений:

$$\begin{cases} x(x+1) - y(y+1) = 130, \\ x(x+1) + y(y+1) = 350; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + x - y^2 - y = 130, \\ x^2 + x + y^2 + y = 350. \end{cases}$$

Сложив два уравнения, получим

$$2x^2 + 2x = 480, \text{ т. е. } x^2 + x - 240 = 0.$$

$$D = b^2 - 4ac = 961, \text{ откуда } x_1 = 15, \ x_2 = -16.$$

Второй корень не удовлетворяет условию задачи. Подставим в первое уравнение $x = 15$ и найдем y:

$$y^2 + y - 110 = 0, \quad D = b^2 - 4ac;$$

$$D = 441, \quad y_1 = 10, \quad y_2 = -11.$$

Второе значение не удовлетворяет условию задачи.

Задачи.

1. По плану XII пятилетки в СССР должны произвести некоторое количество (в млн. т) минеральных удобрений. Если бы в 1940 г. удобрений произвели на 7 млн. т больше, то квадрат этого количества на 50 млн. т был бы меньше, чем произвели в 1985 г.; если бы в 1940 г. произвели бы на 42 млн. т больше, то произвели бы столько, сколько составляет 30% производства минеральных удобрений по плану на 1985 г. Найти: а) на сколько миллионов тонн минеральных удобрений в 1985 г. произвели больше, чем в 1940 г.; б) во сколько раз в 1985 г. минеральных удобрений произвели больше, чем в 1940 г.

2. На заводе разработали новый тип деталей для генераторов и из 875 кг металла стали делать деталей нового типа на 20 шт. больше, чем делали деталей старого типа из 900 кг. Какова масса деталей старого и нового типов, если две детали нового типа легче одной старого типа на 10 кг?

3. Бригада каменщиков должна была в определенный срок уложить 120 тыс. кирпичей, но, улучшив организацию труда, бригада выполнила работу на 4 дня раньше срока. Определить, какова была норма ежедневной кладки кирпича и сколько укладывали кирпичей ежедневно после улучшения организации труда, если известно, что бригада за 3 дня уложила на 5000 кирпичей больше, чем полагалось укладывать за 4 дня по норме.

4. Если бы в 1990 г. химических волокон и нитей выпустили на $\frac{7}{20}$ млн. т меньше, чем по плану, то квадрат этого количества на $\frac{3}{5}$ млн. т был бы меньше, чем в 2000 г. Найти: а) сколько миллионов тонн должны произвести данной продукции в 1990 г. и в 2000 г., если в 2000 г. должны произвести на 1 млн. т больше, чем в 1990 г.; б) на сколько процентов должны увеличить производство химических волокон и нитей в 2000 г. относительно 1990 г.

5. Две бригады, работая вместе, закончили ремонт участка пути за 6 дней. Одной первой бригаде для выполнения 40% всей работы потребовалось бы на 2 дня больше, чем одной второй бригаде для выполнения $13\frac{1}{3}$ всей работы. Найти, за сколько дней могла бы отремонтировать весь участок каждая бригада отдельно.

6*. С пристани на станцию должно быть перевезено 690 т груза пятью трехтонными и десятью полуторатонными грузовиками. После нескольких часов работы все грузовики вывезли $\frac{25}{46}$ груза. Чтобы выполнить перевозку в срок, времени нужно на 2 ч меньше, чем было затрачено. Перевозка была закончена в срок, так как шоферы стали за час делать на одну поездку больше, чем раньше. Найти, за сколько часов был перевезен весь груз и сколько поездок в час делали машины первоначально, если полуторатонка делала на одну поездку в час больше трехтонки.

7. Равнодействующая двух сил, пересекающихся под прямым углом, равна 15 Н. Если одну из этих сил уменьшить на 4 Н, а другую увеличить на 6 Н, то равнодействующая их будет равна 17 Н. Найти действующие силы.

8. Тело взвесили на неправильных весах, т. е. с неравными плечами. При установке гирь на одной чаше измеренная масса тела оказалась m, а на другой — q. Найти истинную массу тела.

9. По плану XII пятилетки в 1990 г. (нижняя граница плана) в СССР должны произвести некоторое количество (в млн. т) хлопка-сырца. Если хлопка-сырца в 1990 г. произведут на 6,2 млн. т меньше, то квадрат этого количества на 0,5 млн. т будет меньше, чем произвели хлопка-сырца в 1980 г. Если в 1980 г. хлопка-сырца произвели бы на 0,7 млн. т больше, то произвели бы его столько, сколько в 1990 г. Найти: а) сколько миллионов тонн хлопка-сырца произвели в 1980 и 1990 гг.; б) на сколько процентов должны увеличить производство хлопка-сырца в 1980 и 1990 гг.

10*. Дорога от A до B длиной 11,5 км идет сначала в гору, потом по ровному месту и затем под гору. Пешеход, идя из A в B, прошел всю дорогу за 2 ч 54 мин, а на обратную дорогу затратил 3 ч 6 мин. Скорость ходьбы в гору 3 км/ч, по ровному месту 4 км/ч, под гору 5 км/ч. На каком протяжении дорога идет по ровному месту?

11*. От пристани A одновременно отправились вниз по течению реки катер и плот. Плот перемещается со скоростью течения. Катер прошел 96 км, затем повернул обратно и вернулся в A через 14 ч после отплытия. Найти скорость катера в стоячей воде и скорость течения, если известно, что катер встретил плот на обратном пути на расстоянии 24 км от A.

§ 7. ПРОГРЕССИИ

Мы рассмотрим два типа прогрессий — арифметическую и геометрическую и приведем основные изучаемые в школе формулы.

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

$a_n = a_1 + d(n-1) = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ — формула n-го члена арифметической прогрессии.

$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n$ — формула суммы n членов арифметической прогрессии.

$b_n = b_1 q^{n-1} = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$ — формула n-го члена геометрической прогрессии.

$$\begin{cases} S_n = \dfrac{b_n q - b_1}{q-1}; \\ S_n = \dfrac{b_1 (q^n - 1)}{q-1} \quad (q \neq 1) \end{cases}$$ — формулы суммы n первых членов геометрической прогрессии.

Пример 1. Два тела, находясь на расстоянии 158 м друг от друга, начали двигаться одновременно навстречу друг другу. Первое тело движется со скоростью 10 м/с, а второе в первую секунду прошло 3 м, а в каждую последующую на 5 м больше, чем в предыдущую. Через сколько секунд тела встретятся?

Решение. Положим, что тела встретятся через t секунд. Первое тело движется равномерно, и поэтому путь, пройденный этим телом, вычисляется по формуле $s = vt$. Движение второго совершается по закону арифметической прогрессии, первый член которого равен 3 м, а разность — 5 м. Поэтому из условия задачи получим уравнение

$$10t + \frac{6 + 5(t-1)}{2} \cdot t = 158$$

(t — натуральное число), решив которое получим $t_1 = 6$, $t_2 = -\frac{51}{5}$. Второй корень не удовлетворяет условию задачи, так как время не может быть меньше нуля.

Пример 2. В сберегательную кассу внесли вклад в 10 000 р. с доходом 2% годовых. Какую сумму выплатит сберегательная касса вкладчику через 4 года?

Решение. Сберкасса за один год выплатит $S_1 = b_1 + b_1 q = b_1(1+q)$, где b_1 — вклад, q — процентная ставка. За 2 года

$$S_2 = S_1 + S_1 q = S_1(1+q),$$

но $S_1 = b_1(1+q)$, следовательно,

$$S_2 = b_1(1+q)(1+q) = b_1(1+q)^2.$$

Легко убедиться, что за 3 года

$$S_3 = b_1(1+q)^3, \ldots,$$

за n лет

$$S_n = b_1(1+q)^n.$$

По этой формуле определим сумму, которую сберкасса выплатит вкладчику по истечении четырех лет:

$$S_4 = b_1(1+q)^4 = 10\,000\left(1 + \frac{2\%}{100\%}\right)^4 = 10\,000 \cdot 1{,}02^4 =$$
$$= 10\,824,\ 32\ (\text{р.}) = 10\,824\ \text{р.}\ 32\ \text{к.}$$

Задачи.

1. Найти первый член и число членов арифметической прогрессии, зная, что сумма членов равна $157\frac{1}{2}$, разность равна $2\frac{1}{2}$ и последний член равен 27.

2. Найти число членов и сумму членов арифметической прогрессии, если $a_1 = 91$, $a_n = -56$ и $d = -3$.

3. Найти последний член и сумму членов, если члены геометрической прогрессии равны 1, 5, 25, ..., а число членов равно 8.

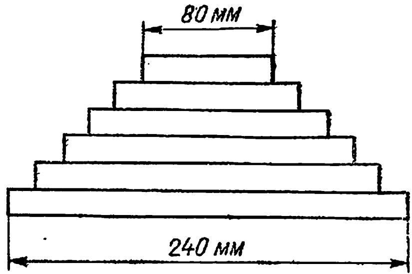

Рис. 5

4. Найти первый и последний члены геометрической прогрессии, если $S = 65\,535$, $n = 8$, $q = 4$.

5. Известно, что бактерия в питательной среде через каждые полчаса делится на две. Сколько бактерий может образоваться из одной бактерии за 10 ч?

6. Какое количество древесины будет на участке через 6 лет, если первоначальное количество древесины было 40 000 м³, при условии, что ежегодный прирост древесины составляет 10%?

7. Рабочий обслуживает 16 ткацких станков, которые работают автоматически. Производительность станка p м/ч. Он пустил первый станок в 8 ч, а каждый следующий — на 5 мин позже. Найти выработку в метрах за первые 2 ч работы.

8. Ступенчатый шкив состоит из шести ступеней. Диаметры их составляют арифметическую прогрессию. Наибольший диаметр равен 240 мм, наименьший — 80 мм. Найти остальные диаметры (рис. 5).

9. В горных местностях температура воздуха летом при подъеме на каждые 100 м в среднем понижается на 0,7 °С. В 11 ч на горе термометр показывал 14,8 °С. Как высоко находится наблюдатель, если у подножия в это время температура 26 °С?

10. Отряд механизаторов в весенне-посевную кампанию в первый день вспахал 100 га пашни, а в каждый последующий день — на 3 га больше, чем в предыдущий. Найти, сколько гектаров пашни отряд механизаторов вспахал за 19 дней.

11. После каждого качания поршня под колоколом воздушного насоса давление воздуха уменьшается на 0,83 начального давления. Определить, как велико будет давление воздуха под колоколом после 15 качаний, если первоначальное давление было равно 760 мм рт. ст.

12*. Сколько литров чистого спирта останется в сосуде, если из 50 л 80%-ного его раствора 20 раз отливать по 1 л раствора, каждый раз добавляя 1 л воды?

13*. В сосуде имелось 1250 л 80%-ного раствора кислоты. Из него 3 раза отливали некоторое количество раствора, добавляя такое же количество воды. В результате в сосуде осталось 125 л чистой кислоты. Какое количество раствора брали из сосуда каждый раз?

14. Шар, катящийся по желобу, в первую секунду проходит

0,6 м, а путь, пройденный в каждую следующую секунду, увеличивается на 0,6 м. Сколько времени будет двигаться шар по шестиметровому желобу?

15. За изготовление и установку первого железобетонного кольца колодца заплатили 10 р., а за каждое следующее кольцо платили на 2 р. больше, чем за предыдущее. Средняя стоимость одного кольца и его установки оказалась равной 22 р. Сколько колец было установлено?

16. Бактерия, попав в живой организм, к концу 20-й минуты делится на две; каждая из них к концу следующих 20 мин вновь делится на две и т. д. Найти число бактерий, образовавшихся из одной бактерии к концу суток.

ПРИМЕНЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ К РЕШЕНИЮ ПРОСТЕЙШИХ ЗАДАЧ С ТЕХНИЧЕСКИМ СОДЕРЖАНИЕМ

Большое значение в машиностроении имеет геометрическая прогрессия. Например, в измерительной технике рассматриваются последовательности длин, площадей, допусков, посадок и т. д., которые во многих случаях удовлетворяют законам геометрической прогрессии.

В станкостроении все ступенчатые шкивы для ременных передач построены таким образом, что диаметр каждой последующей ступени (в мм) больше диаметра предыдущей на одно и то же число, постоянное для данного шкива.

В технике такую геометрическую последовательность величин называют геометрическим или нормальным рядом.

Таблицы нормальных рядов составлены по законам геометрических прогрессий. Всего рассматриваются 4 таких ряда, когда первый член равен 1, а знаменатели соответственно равны:

$$R_{40}=\sqrt[40]{10}\approx 1{,}06;\quad R_{20}=\sqrt[20]{10}\approx 1{,}12;\quad R_{10}=\sqrt[10]{10}\approx 1{,}26;$$
$$R_5=\sqrt[5]{10}\approx 1{,}60.$$

Задачи.

17. Рассчитать геометрический ряд чисел, стандартизирующий скорость вращения шпинделя[1] токарного станка, если известно, что наименьшее число оборотов шпинделя в минуту равно 10, а знаменатель прогрессии 1,25 (дать пять членов ряда).

18. Найти промежуточные диаметры валов, если известно, что диаметр наименьшего вала 100 мм, а четвертого по порядку 201,6 мм (диаметры составляют геометрическую прогрессию).

19. Завод приобрел пять электромоторов, мощности которых составляют геометрическую прогрессию. Рассчитать мощность трех

[1] Шпиндель — главный вал машин-орудий (токарных, сверлильных, шлифовальных и других станков) с основным вращательным движением. Шпиндель обычно покоится в двух подшипниках и совершает либо исключительно вращательное, либо вращательное и одновременно осевое поступательное движения

средних моторов, если известно, что наименьшая мощность мотора 5 кВт, наибольшая — 12,5 кВт.

20. Число оборотов в 1 мин шести настроечных шестерен образует геометрическую прогрессию со знаменателем 1,12. Определить число оборотов каждой из шестерен, если первая из них делает наименьшее число оборотов — 30 об/мин.

21. Рассчитать геометрический ряд чисел, стандартизирующий скорость вращения шпинделя токарного станка, если известно, что наименьшее число оборотов шпинделя в минуту равно 12,5 и числа составляют геометрическую прогрессию со знаменателем $q \approx 1{,}25$ (дать пять членов ряда).

22. Рассчитать промежуточные диаметры шкивов, если на общий вал нужно насадить пять шкивов и диаметры крайних равны 110 и 206 мм (диаметры составляют геометрическую прогрессию).

23. Диаметры пяти шкивов, насаженных на общий вал, образуют арифметическую прогрессию. Найти диаметры шкивов, если сумма первого и третьего составляет 268 мм, а второго и четвертого — 316 мм.

24. Рассчитать зевы первых пяти ключей ряда (с точностью до 0,1), если известно, что зев наименьшего ключа равен 3 мм, а знаменатель геометрического ряда, стандартизирующего линейные размеры зева, равен 1,26.

25. Мощности пяти электромоторов составляют возрастающую геометрическую прогрессию. Мощность первого 5 кВт, а третьего 7,9 кВт. Рассчитать мощности остальных электромоторов.

§ 8. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ И ЛОГАРИФМЫ

При решении задач этого раздела полезно использовать следующие формулы:

1) $\log_a (N_1 \cdot N_2) = \log_a N_1 + \log_a N_2$; 3) $\log_a (N^n) = n \log_a N$;

2) $\log_a \left(\frac{N_1}{N_2}\right) = \log_a N_1 - \log_a N_2$; 4) $\log_a (\sqrt[n]{N}) = \frac{\log_a N}{n}$.

Пример 1. Если при радиоактивном распаде количество вещества за каждые последующие сутки уменьшается вдвое, то масса оставшегося вещества m вычисляется по формуле

$$m = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^x, \qquad (1)$$

где m_0 — начальная масса, x — период полураспада в сутках.

Построить график отношения $\frac{m}{m_0}$ от времени и определить по графику:

а) во сколько раз уменьшится масса этого вещества через 1,5 сут и 2 сут;

б) через сколько суток масса вещества уменьшится в 16 раз.

Решение. Пусть $\frac{m}{m_0}=y$. Тогда из равенства (1) следует, что $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Построим график данной функции по таблице:

x	0	1	2	3	4
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

На координатной плоскости построим соответствующие им точки и соединим их плавной кривой (рис. 6).

а) Из графика функции следует, что через $1\frac{1}{2}$ сут масса вещества уменьшится примерно в 2,8 раза, а через 2 сут — в 4 раза, соответственно останется $\frac{5}{14}$ и $\frac{1}{4}$ части первоначальной массы вещества.

б) Масса вещества уменьшится в 16 раз через 4 сут.

Пример 2. В городе проживает $2{,}49\cdot10^5$ жителей. Ежегодно народонаселение увеличивается на 1,7%. Какое число жителей будет в этом городе через 12 лет?

Решение. Население увеличивается по геометрической прогрессии. Таким образом, для решения задачи нужно определить 12-й член геометрической прогрессии:

$$b_{12}=b_1q^{12}=2{,}49\cdot10^5\cdot\left(1+\frac{1{,}7\%}{100\%}\right)^{12}\approx3{,}05\cdot10^5.$$

Пример 3. Одна бригада за месяц вырабатывает продукции в 1,1 раза меньше, чем другая. Ежемесячно в течение года производительность труда первой бригады растет на 1%, а второй — на 0,7%. Через сколько месяцев первая бригада догонит вторую по сменному выпуску продукции? Какая из этих бригад даст больше продукции за полгода?

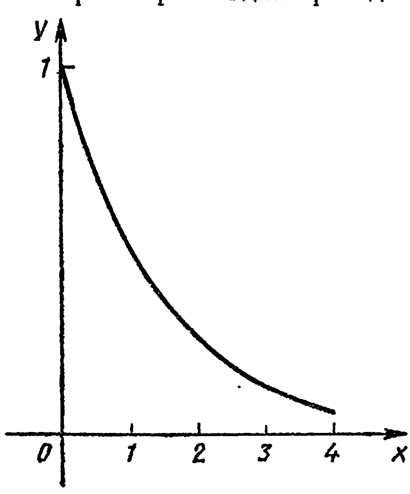

Рис. 6

Решение. Пусть b_1 — месячная производительность труда первой бригады, тогда $1{,}1b_1$ — месячная производительность труда второй бригады. Так как бригады соответственно увеличивают свою производительность труда за месяц на 1 и 0,7%, то получим:

$$b_n^1 = b_1(1+q)^n = b_1\left(1+\frac{1}{100}\right)^n = b_1\cdot 1{,}01^n,$$

$$b_n^2 = 1{,}1b_1(1+q) = 1{,}1b_1\left(1+\frac{0{,}7}{100}\right)^n = 1{,}1b_1\cdot 1{,}007^n.$$

По условию через n месяцев $b_n^1 = b_n^2$, следовательно,

$$b_1\cdot 1{,}01^n = 1{,}1b_1\cdot 1{,}007^n, \text{ или } 1{,}01^n = 1{,}1\cdot 1{,}007^n.$$

Разделив обе части этого уравнения на $1{,}007^n$, получим $\frac{1{,}01^n}{1{,}007^n} = 1{,}1$. Прологарифмировав, найдем:

$$n \lg 1{,}01 - n\lg 1{,}007 = \lg 1{,}1,$$
$$n(\lg 1{,}01 - \lg 1{,}007) = \lg 1{,}1,$$
$$n = \frac{\lg 1{,}1}{\lg 1{,}01 - \lg 1{,}007} = \frac{0{,}0414}{0{,}0043 - 0{,}0030} \approx 32,$$

следовательно, вторая бригада производит продукции больше первой ежемесячно в течение полугода. Первая бригада догонит вторую через 32 месяца.

Пример 4. Каким должен быть средний темп выпуска синтетической смолы и пластмасс за пятилетку 1986—1990 гг., если общий объем выпуска должен возрасти на 35%?

Решение. Средний темп выпуска—это знаменатель геометрической прогрессии. Примем выпуск продукции в 1985 г. за 1, т. е. $b=1$, далее, $b_5 = b + \frac{35}{100} = 1{,}35$. Отсюда $1{,}35 = 1\cdot q^5$, поэтому $q = \sqrt[5]{1{,}35}$. Имеем $\lg q = \frac{1}{5}\lg 1{,}35 = \frac{0{,}1303}{5} = 0{,}02606$, откуда по таблице антилогарифмов найдем, что $q = 1{,}062$. Ежегодный прирост в процентах определяется из условия $\frac{p}{100\%} = 1{,}062 - 1$, откуда $p \approx 6{,}2\%$.

Задачи.

1. В XII пятилетке национальный доход в СССР будет увеличен на 19% (нижняя граница плана). Вычислить среднегодовой темп роста национального дохода в XII пятилетке.

2. С 1986 до 2000 г. реальные доходы на душу населения будут увеличены в 1,6 раза. Найти среднегодовой темп прироста реальных доходов на душу населения.

3. С 1986 по 1990 г. требуется повысить производительность труда в машиностроении на 39% (нижняя граница плана), чтобы снизить себестоимость продукции. Найти среднегодовой темп роста производительности труда.

4. По решению XXVII съезда КПСС экономика страны будет переводиться на интенсивный путь развития, для того чтобы с 1986 по 2000 г. увеличить национальный доход страны примерно в два раза. Найти среднегодовой темп прироста национального дохода.

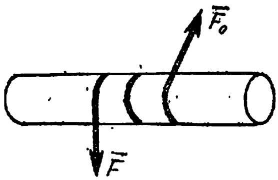

Рис. 7

5. Население города возрастает ежегодно на 3% по сравнению с предыдущим годом. Через сколько лет население этого города увеличится в 1,5 раза?

6. Известно, что сила трения, действующая со стороны троса, намотанного на железный барабан, дает возможность меньшей силой $\overline{F}_0$ уравновесить бо́льшую силу $\overline{F}$ (рис. 7). Зависимость между силами $\overline{F}_0$ и $\overline{F}$ при равновесии описывается формулой $\overline{F}=\overline{F}_0\cdot 3^n$, где n — число витков на барабане. Определить: а) какого веса F можно удержать, если $F_0=5$ Н и трос охватывает барабан 1 раз; 1,75 раза; б) силу F_0, если она уравновешивает силу $F=270$ Н с помощью троса, обмотанного 3 раза вокруг барабана; в) сколько раз трос намотан на барабан, если силой 5 Н удерживается груз в 45 Н.

7. Вычислить массу стальной трубы длиной 7,5 м, зная, что внешний и внутренний диаметры ее соответственно равны 155 и 135 мм, а плотность стали — 7960 кг/м³.

8. Известно, что количество теплоты Q, выделяемое током в проводнике, равно I^2Rt. Вычислить Q, если $t=250$ с, $R=5$ Ом, $I=0{,}45$ А.

9. Известно, что по формуле $h=1908\lg\frac{760}{p}$ определяется высота в метрах над уровнем моря при $t=10$ °С. Определить высоту h, если $p=406{,}4$ мм рт. ст.

10. Используя формулу $a=\frac{4\pi^2r}{t^2}$, найти центростремительное ускорение Луны, зная, что расстояние от Земли до Луны $r=60{,}27$ земных радиусов, а время обращения Луны вокруг Земли $t=27{,}32$ сут (средний радиус Земли 6371 км).

11. Найти среднюю плотность сплава, если радиус и высота цилиндра равны: $r=5{,}5$ см и $h=8{,}25$ см, а его масса 6 кг 545 г.

12. Моток стальной проволоки имеет массу 40 кг. Диаметр проволоки равен 2,5 мм. Найти длину этой проволоки, если плотность стали 7960 кг/м³.

13. Через какое время масса радия уменьшится от m_0 до m, если его период полураспада равен t мин? Вычислить это время, если $m_0=100$ мг, $m=25$ мг и $t=20$ мин.

14*. В лаборатории имеется 30 г радиоактивного вещества с периодом полураспада 10 сут. Через 10 сут в лабораторию доставили еще 15 г того же вещества. Вычислить, через сколько суток в лаборатории из всей массы радиоактивного вещества останется 7,5 г.

15*. Имеется 6 г радиоактивного вещества с периодом полураспада 6 лет и 8 г радиоактивного вещества с периодом полураспада 3 года. Через сколько лет масса первого вещества будет на 1 г больше массы второго вещества?

16. На участке было $1{,}3\cdot 10^6$ м³ древесины. Найти количество

древесины на этом участке через 10 лет, если ежегодный прирост древесины 3,5%.

17. Участок леса содержит $1{,}44\cdot10^5$ м^3 древесины. Вычислить, на сколько кубометров увеличится количество древесины за 15 лет, если средний ежегодный прирост древесины составляет 2,8%.

18. В сберкассу внесли вклад с доходом 3% годовых. Через сколько лет сумма вклада удвоится?

19. Через 12 лет у вкладчика на сберкнижке стало 11,4 тыс. р. Найти первоначальную сумму вклада, если увеличение вклада за год составляет 3%.

20. Начальная стоимость оборудования цеха равна 320 тыс. р. Каждый год амортизационные отчисления составляют 4%. Найти стоимость оборудования цеха через 5 лет.

21. Найти среднегодовой прирост древесины, если за 20 лет количество древесины на участке удвоилось.

22. По плану XII пятилетки намечено повысить производительность труда в сельскохозяйственном производстве в 1,5 раза за счет широкого внедрения механизации работ. Найти среднегодовой темп повышения производительности труда в XII пятилетке.

§ 9. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

ИЗМЕРЕНИЕ УГЛОВ

При решении задач этого раздела следует пользоваться формулой $l=r\cdot a$, где l—длина дуги, ограничивающей угол в a рад, при радиусе окружности, равном r.

Пример. Найти длину дуги, если $r=9$ дм, $a=3{,}5$ рад.

Решение. Находим $l=9\cdot3{,}5=31{,}5$ (дм.).

Задачи.

1. Выразить углы в радианной мере: а) 20°; б) 58°; в) 88°30′.

2. Выразить углы в градусной мере: а) 0,3316 рад; б) 1,5307 рад.

3. Найти длину дуги центрального угла 75°48′, если радиус окружности равен 80 см.

4. На какой угол надо повернуть минутную стрелку, чтобы перевести часы на 50 мин назад? на 2 ч 24 мин вперед? на 5 ч 20 мин назад?

5. Ведро в колодце поднимется на 8 м, если рукоятка ворота повернется на 20 полных оборотов по часовой стрелке. На какой угол надо повернуть рукоятку ворота, чтобы ведро поднялось на 7,5 м? опустилось на 5 м?

6. Шестеренка имеет 144 зубца. Найти, на сколько градусов повернется шестеренка при повороте на 4; 24; 150; 600 зубцов против часовой стрелки; на 12; 24; 288 по часовой стрелке.

7. Окружность морских компасов делится на 32 равные части, называемые румбами. Выразить румб в градусах и радианах.

8. Найти периметр сектора, радиус окружности которого 108 см, если центральный угол равен $1\frac{5}{9}$ рад.

9. Для измерения углов артиллеристы употребляют особую единицу, которую называют делением угломера или тысячной. Угол 360° содержит 6000 тысячных. Найти, сколько тысячных в одной минуте, и выразить в тысячных углы: 1°30′, 6°, 24°, 60°.

10. Зубчатая передача состоит из двух зацепляющихся колес. Меньшее колесо (ведущее) имеет 48 зубцов, а большее (ведомое) — 60 зубцов. На какой угол должно повернуться ведущее колесо, чтобы ведомое повернулось на 6 полных оборотов против часовой стрелки?

11. Географическая долгота места измеряется особой единицей, называемой часом, равной $\frac{1}{24}$ части полного угла (360°), на который поворачивается Земля за сутки. Один час содержит 60 мин, а каждая минута содержит 60 с. Выразить час, минуту и секунду долготы в градусах, в минутах и секундах дуги.

12. Географическая долгота городов *А*, *Б*, *В* (от Гринвича) соответственно равна 6 ч; 50 мин; 40 с. Выразить долготу этих городов в градусах, минутах и секундах угловой меры.

13. Географическая долгота Москвы (от Гринвича) равна 37°34′15″. Выразить ее в часах, минутах и секундах времени.

14. Географическая долгота города *А* (от Гринвича) равна 4 ч 23 мин 45 с. Выразить долготу города *А* в градусах, минутах и секундах.

15. Можно ли вычислить длину дуги, если известно только число градусов, содержащихся в этой дуге?

ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

Пример 1. Кронштейн посредством шарниров соединен с потолком и стеной (рис. 8). К шарнирному болту *А* подвешен груз весом 300 Н. Стержни *АС* и *АВ* образуют угол $\alpha=40°$. Найти силы, действующие на стержни.

Решение. Груз действует на стержни так, что стержень *АВ* растягивается, а стержень *АС* сжимается с силами $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ соответственно. Из прямоугольного треугольника *АВС* имеем:

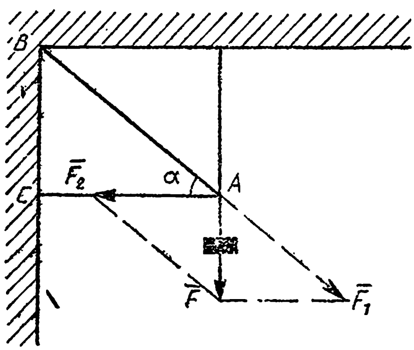

Рис. 8

а) $\frac{F}{F_1}=\sin\alpha$, откуда $F_1=$
$=\frac{F}{\sin\alpha}=\frac{300}{0,6428}=466,7$ (Н);

б) $\frac{F_2}{F}=\operatorname{ctg}\alpha$, откуда $F_2=$
$=F\operatorname{ctg}\alpha=300\cdot1,19\approx357,5$ (Н).

Пример 2. На обойму подвижного блока действует сила в 150 Н. Тросик, охватывающий блок, образует угол $\alpha=67°$ (рис. 9). Какую силу надо при-

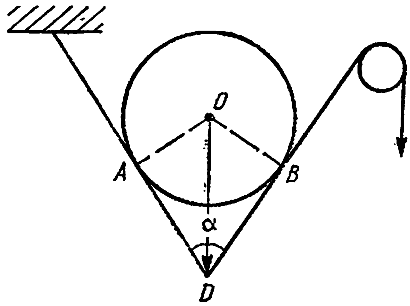

Рис. 9

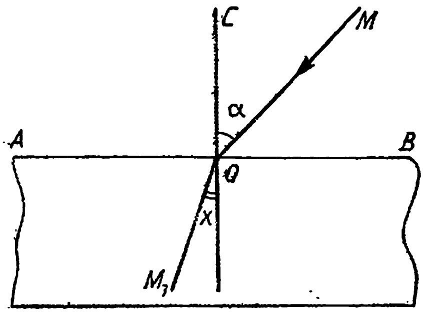

Рис. 10

ложить к концу тросика, чтобы, закрепив другой его конец, уравновесить груз?

Решение. Приведем два случая решения:

а) Случай в математической интерпретации.

Разложим силу $\overline{F}$ по двум направлениям DB и DA по правилу параллелограмма. В данном случае, так как силы равны, $\triangle BAD$ равнобедренный. Теперь найдем искомую силу: $\angle ODB=\frac{\alpha}{2}$, следовательно, $DB=\frac{F}{2\cos\alpha/2}=\frac{150}{2\cos 33°30'}\approx 90$ (Н).

б) Случай в физической интерпретации.

Подвижный блок O находится в равновесии под действием трех сил: $\overline{F}$, $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$, поэтому $\overline{F}+\overline{F}_1+\overline{F}_2=\overline{0}$. Ввиду равенства моментов сил $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ относительно оси 0 модули этих сил тоже равны: $F_1=F_2=F$. Следовательно,

$$F_1=\frac{F}{2\cos\alpha/2}=\frac{150}{2\cos 33{,}5°}\approx 90\ (\text{Н}).$$

Пример 3. Луч света падает на стекло под углом $\alpha=43°30'$. Определить угол преломления луча в стекле (рис. 10). (Показатель преломления стекла равен 1,5.)

Решение. Пусть MO — падающий луч, CO — перпендикуляр к поверхности стекла, тогда $\angle COM=43°30'$, OM_1 — направление преломленного луча. Известно, что отношение синуса угла падения к синусу угла преломления равно показателю преломления, следовательно, $\frac{\sin 43°30'}{\sin x}=1{,}5$. Отсюда

$$\sin x=\frac{\sin 43°30'}{1{,}5}=\frac{0{,}6884}{1{,}5}\approx 0{,}4589 \text{ и } x=\arcsin 0{,}4589\cong 27°19'.$$

Пример 4. Найти угол подъема винта, если шаг винта 3 мм, а диаметр цилиндра 18 мм (рис. 11).

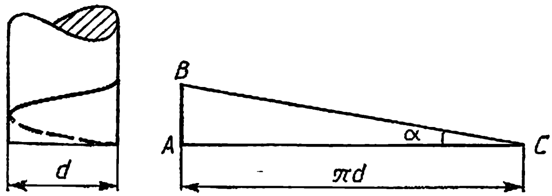

Рис. 11

Решение. На рисунке 11 справа дана развертка цилиндра высотой в один шаг винта. Из $\triangle ABC$ имеем $AC = \pi d$, $AB = h$,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{h}{AC} = \frac{3}{\pi d} = \frac{3}{3{,}14\cdot 18} = \frac{1}{3{,}14\cdot 6} \approx 0{,}0531 \text{ (мм)},$$

откуда $\alpha = 3°03'$.

Пример 5. Из окна, расположенного на высоте 16 м над поверхностью земли, нижний край дома, стоящего прямо на другой стороне улицы, виден под углом понижения $\alpha = 32°10'$. Вычислить ширину улицы (рис. 12).

Решение. Углом понижения называется угол, образованный направлением луча на предмет и горизонтальной прямой. Следовательно, $\angle DAC = 32°10'$ и $\angle ACB = 32°10'$. По условию задачи оба дома стоят друг против друга. Следовательно, длина BC равна ширине улицы. Из треугольника ABC имеем $\frac{BC}{AB} = \operatorname{ctg}\alpha$; откуда $BC = AB\cdot\operatorname{ctg}\alpha = 16\cdot\operatorname{ctg} 32°10' = 16\cdot 1{,}5900 \approx$ $\approx 25{,}5$ (м).

Пример 6. Чтобы определить ширину реки, на одном (доступном) берегу ее, непосредственно у воды, берут базис BC длиной a м. Из одного конца C базиса по перпендикулярному к нему направлению на противоположном берегу у самой воды виден предмет A, а из другого конца B базиса этот предмет виден под углом β к нему (рис. 13). Вычислить ширину реки, если $a = 200$ м и $\beta = 39°36'$.

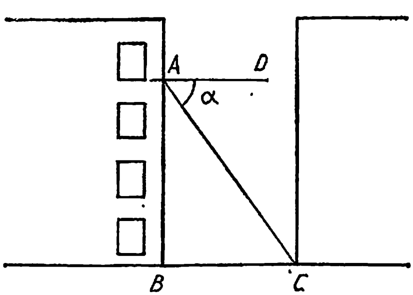

Рис. 12

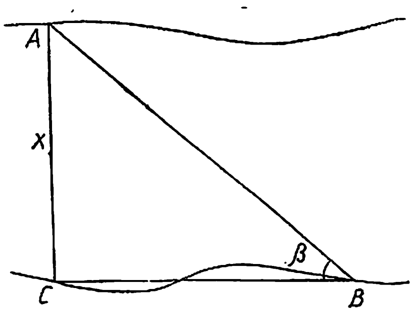

Рис. 13

Решение. Из прямоугольного треугольника ABC имеем:

$$\frac{AC}{BC} = \operatorname{tg}\beta, \text{ откуда } AC = BC\cdot\operatorname{tg}\beta = 200\cdot\operatorname{tg}39°36' \approx 165{,}5 \text{ (м)}.$$

Пример 7. В планке требуется сделать паз, размеры сечения которого даны на рисунке 14. Вычислить углы наклона боковых граней паза, зная, что они равны между собой.

Решение. Построим $AB \perp CE$, тогда $\triangle ABC$ — прямоугольный.

$$AB = 4 \text{ см}, \quad BC = \frac{EC - AD}{2} = 3 \text{ см}.$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{3} = 1{,}3333 \text{ и } \alpha = \operatorname{arctg} 1{,}3333 \approx 53°8'.$$

Пример 8. Труба A диаметром 100 мм при помощи конусообразного раструба переходит в трубу B вдвое большего поперечного сечения (рис. 15). Зная, что образующие конической поверхности сходятся под углом 40°, определить длину раструба x.

Решение. Так как поперечное сечение трубы B по условию задачи вдвое больше, чем A, а площади кругов относятся как квадраты их диаметров, то диаметр $d = 100\sqrt{2}$, а потому $EC = CM - EM = 50\sqrt{2} - 50 = 20{,}71$ (мм).

Из треугольника CED имеем $CE = CD\cdot\sin CDE$, или $20{,}71 = x\cdot\sin 20°$, откуда $x = \frac{20{,}71}{\sin 20°} = \frac{20{,}71}{0{,}3420} = 60{,}6$ (мм).

Пример 9. Двадцать стальных шариков диаметром по 16 мм находятся в подшипнике (рис. 16). Определить диаметр внутреннего и наружного круга катания (радиусы катания — OA и OB), считая, что шарики лежат вплотную друг к другу.

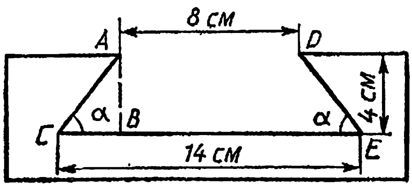

Рис. 14

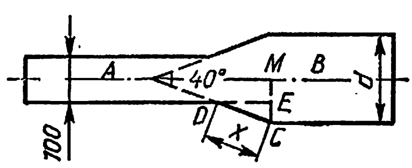

Рис. 15

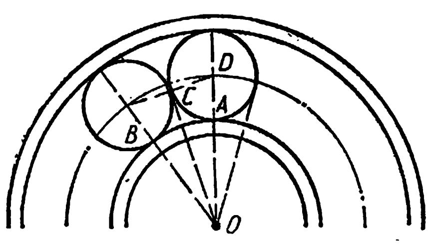

Рис. 16

Решение. По условию задачи нужно определить OA и OB. Треугольник OCD прямоугольный, так как угол $OCD = 90°$.

$$CD = \frac{d}{2} = \frac{16}{2} = 8 \text{ (мм)}, \quad \frac{CD}{OD} = \sin\alpha, \quad 2\alpha = \frac{360°}{20} = 18°.$$

Тогда $\alpha = \frac{18}{2} = 9°$ и $\frac{CD}{OD} = \sin 9°$, откуда

$$OD = \frac{CD}{\sin 9°} = \frac{8}{0{,}1564} \approx 51{,}1 \text{ (мм)}.$$

Следовательно, $OA = r = 43{,}1$ мм, $OB = R = OD + 8 = 59{,}1$ (мм). Итак, диаметр внутреннего катания 43,1 мм, а диаметр внешнего катания 59,1 мм.

Задачи.

16. Вершина ретрансляционной башни видна с расстояния 420 м от ее основания под углом $\alpha = 27°20'$. Определить ее высоту h (рис. 17).

17. Сила $\bar{F}$ разложена на две составляющие $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, образующие между собой угол 108°. Найти модули составляющих (рис. 18), если они равны, $F = 1000$ Н.

18. Определить (пренебрегая силой трения) ускорение, с которым скользит тело с наклонной плоскости, угол наклона которой равен α (рис. 19). Вычислить уско-

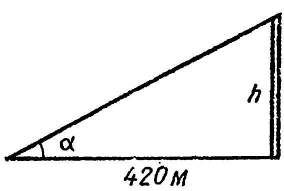

Рис. 17

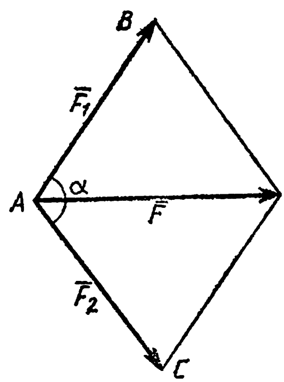

Рис. 18

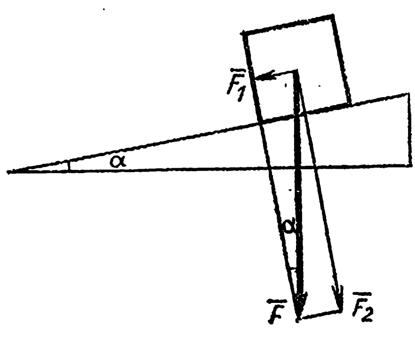

Рис. 19

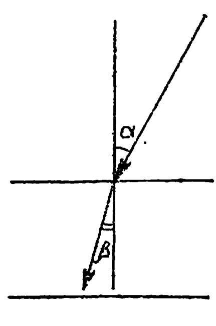

Рис. 20

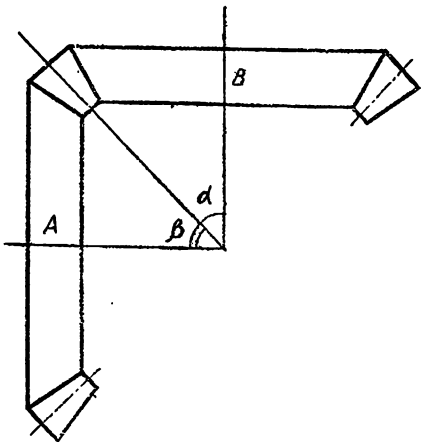

Рис. 21

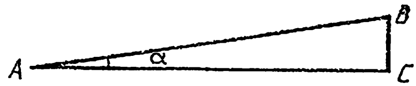

Рис. 22

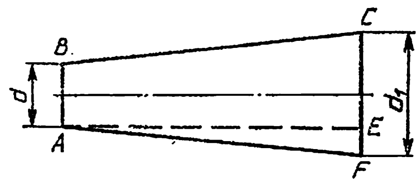

Рис. 23

рение тела при $\alpha = 10°$. (Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2.)

19. Луч падает на стекло под углом $\alpha = 28°36'$ (рис. 20). Принимая показатель преломления стекла равным 1,5, определить угол преломления луча в стекле, считая, что показатель преломления воздуха равен 1.

20. Два вала, расположенные под прямым углом друг к другу, соединены при помощи конических зубчатых колес (шестеренок) (рис. 21). Определить углы наклона x, y зубцов к осям валов, если известно, что шестерня A имеет диаметр 96 мм, а шестерня B—64 мм.

21. Железнодорожная линия имеет предельный уклон в 10 тысячных. Это значит, что на каждые 1000 м пути по горизонтальному расстоянию допускается подъем пути в гору не свыше чем на 10 м (рис. 22). Каков будет наклон пути к горизонту при таком уклоне?

22. Из пункта A, расположенного на берегу реки под прямым углом относительно этого берега, видно дерево, растущее на другом берегу. От пункта A вдоль берега отмерили базис $AB = 250$ м. Вычислить ширину реки с точностью до 0,01 км, если из пункта B дерево видно под углом $\alpha = 81°12'$, относительно базиса AB.

23. В механических работах производят обточку на конусность (рис. 23) (конусностью является отношение разности диаметров оснований к длине детали). Найти конусность в угловых единицах, если $d = 5$ мм, $d_1 = 15$ мм, длина детали 100 мм.

24. Иногда конусность вычисляется в процентах. На рисунке 24 изображена коническая цапфа, имеющая подъем в 32% (это значит, что на каждые 100 мм высоты цапфы радиус ее сечения

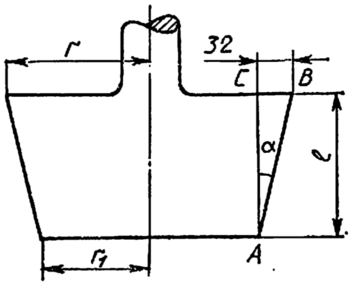

Рис. 24

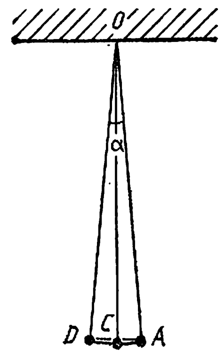

Рис. 25

увеличивается на 32 мм). Найти конусность в угловых мерах и в процентах, если: а) $r=11$ мм, $r_1=22$ мм, $l=100$ мм; б) $r = 13$ мм, $r_1=31$ мм, $l=200$ мм.

25. Коническая цапфа имеет подъем в 12%. Найти верхний диаметр цапфы, если высота ее 130 мм, а диаметр нижнего основания 100 мм.

26. Угол между образующими конуса равен $14°10'$. Определить конусность.

27. Угол между крайними положениями маятника $\alpha=10°$. Каково наибольшее отклонение конца маятника от вертикали, проходящей через точку привеса, если длина маятника 0,4 м (рис. 25)?

28. Определить высоту дерева AD, если его вершина A видна из точки B под углом $\alpha=31°$ к горизонту, высота угломерного прибора, удаленного от дерева на расстояние $DE=37$ м, равна 1,5 м (рис. 26).

29. Фабричная железная труба высотой 32 м поддерживается железными тросами, прикрепленными к трубе на расстоянии 0,75 м ее высоты, считая от земли. Вычислить длины тросов, зная, что они образуют с горизонтом угол $\alpha=40°$ (рис. 27).

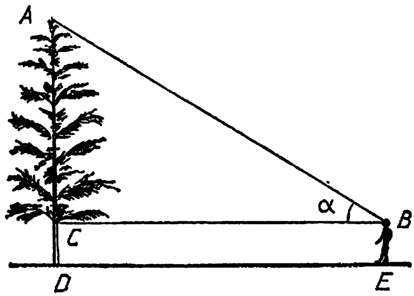

Рис. 26

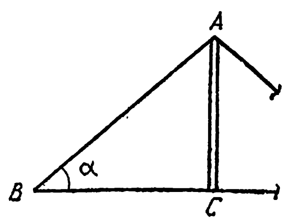

Рис. 27

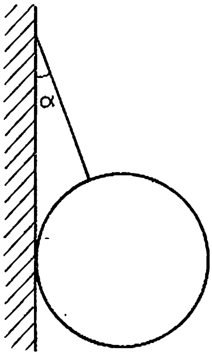

Рис. 28

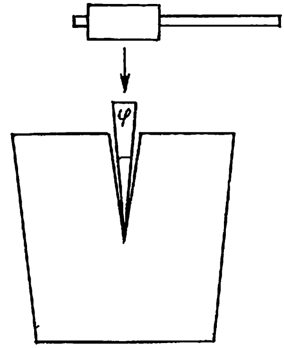

Рис. 29

30. Шар массой 15 кг висит на веревке у стены (рис. 28). Определить силу натяжения веревки и силу давления шара на стену, если угол между веревкой и стеной составляет $\alpha = 20°$.

31. Под каким углом к направлению движения надо приложить силу, равную 20 Н, чтобы на пути 13 м работа данной силы была равна 200 Дж?

32. На обух клина произведен удар с силой $F = 360$ Н (рис. 29). а) Определить силу, с которой каждая щека клина действует на полено, если угол при вершине $\varphi = 10°$. б) Как зависит модуль этой силы от угла φ?

33. Тело массой m находится на плоскости, которая с горизонтом образует угол α (рис. 30). Коэффициент трения между данным телом и плоскостью равен μ. Найти, при каких значениях угла α это тело будет: а) двигаться по плоскости вниз; б) находиться в равновесии.

34. От поверхности земли (подошвы) до вершины террикона нужно построить одноколейную железную дорогу. Найти, сколько погонных метров рельсов потребуется для постройки этой дороги, если угол подъема террикона $\alpha = 43°$, а его высота равна 150 м.

35. Горный комбайн за смену проходит 6 погонных метров[1], форма сечения проходки — равнобочная трапеция высотой $h = 2{,}5$ м, основание $a = 3{,}8$ м, угол при основании $\alpha = 81°$. Найти, сколько тонн угля добывают этим комбайном за смену, если плотность угля 1300 кг/м^3.

36. Сила $\overline{F}$, действующая вертикально на крепь[2] наклонной горной выработки, по модулю равна 800 000 Н. Найти составляющие: тангенциальную $\overline{F}_1$ и нормальную $\overline{F}_2$, составляющие эти силы, если угол наклона выработки $\alpha = 30°$ (рис. 31).

---

[1] Погонный метр равен 1 м.

[2] Крепь — совокупность устройств для предохранения горных выработок от обвала.

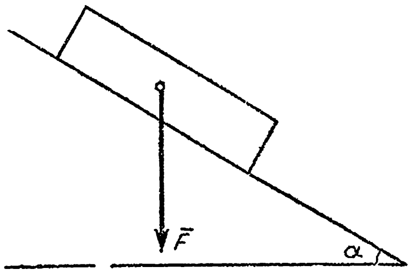

Рис. 30

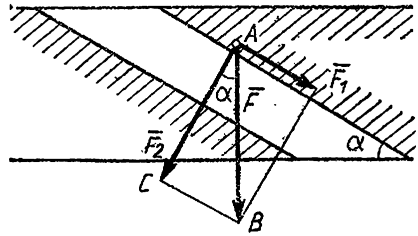

Рис. 31

37. По уклону пласта проложен трубопровод для откачивания воды с нижнего горизонта шахты. Угол падения пласта, образованный поверхностью пласта с горизонтом, равен 25°. Найти глубину, с которой откачивают воду, если длина трубопровода равна 1070 м.

38. Сила $\overline{F}$, модуль которой равен 61 Н, разложена на две взаимно перпендикулярные составляющие и образует с одной из них угол 38°40′. Определить модули составляющих сил.

39. Вагонетку, масса которой равна 600 кг, необходимо поднять по наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол 17°. Какую силу параллельно наклонной плоскости надо приложить для этого к вагонетке? С какой силой вагонетка давит на наклонную плоскость? (Трением пренебречь.)

Указание. Разложить силу тяжести по двум направлениям: параллельно и перпендикулярно наклонной плоскости.

40. Внешний диаметр винтовой нарезки равен 50 мм, внутренний диаметр 42 мм, высота винтового хода или шаг винта равен 6 мм. Найти угол подъема винта.

41. Винтовая нарезка имеет $4\frac{1}{2}$ хода на 1 дюйм[1], внешний диаметр нарезки 2 дюйма, внутренний диаметр 1,716 дюйма. Вычислить угол подъема[2].

42. Внешний диаметр винта 25,4 мм, внутренний — 21,3 мм. Угол подъема 2°29′. Найти высоту винтового хода или шаг винта и определить число ходов на 1 дюйм высоты винта.

43. Определить угол подъема спирали сверла, если известно, что полный оборот сверла получается на длине, равной семи его диаметрам.

44. На крышке парового цилиндра диаметром 350 мм требуется просверлить восемь отверстий для болтов. Определить расстояние между центрами этих отверстий, если эти центры должны отстоять от краев крышки на 50 мм.

---

[1] Дюйм — единица длины, равная 2,54 см.

[2] Определить ход винта — это указать число ходов на 1 дюйм. Такой способ определения хода винта принят во многих государствах.

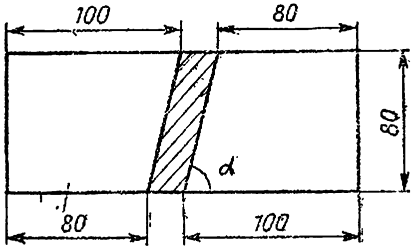

Рис. 32

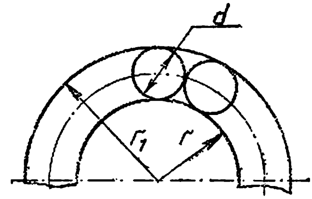

Рис. 33

45. В изображенном на рисунке 32 металлическом бруске требуется прорезать наклонную канавку (паз). На основании размеров, показанных на рисунке, установить, под каким углом должен быть направлен к длинной стороне бруска резец.

46. Две силы, равные по модулю 300 Н, действуют на одну и ту же точку под углом 148°40′ друг к другу. Найти их равнодействующую.

47. Двадцать пять стальных шариков диаметром по 15 мм находятся в подшипнике. Определить радиусы внутреннего и наружного круга катания (рис. 33).

48. Найти уклон дороги, поднимающейся под углом 4° к горизонту.

Указание. Угол (или подъем) дороги измеряется отношением $h:1000$, где h есть выраженная в метрах высота подъема на 1 км горизонтального пути.

49. Чтобы определить ширину реки AB, на берегу реки в направлении AB отмерили расстояние $BC=36$ м. Из пункта C верхушка дерева D, расположенного в точке A на противоположном берегу реки, видна под углом 14°, а из пункта B — под углом 31°. Определить ширину реки AB и высоту дерева AD.

50. Какова высота скалы, если она из пункта A видна под углом $\alpha=40°40'$, а из пункта B — под углом $\beta=20°20'$? Расстояние между пунктами A и B равно 90 м. Высота угломерного прибора равна 1,7 м (рис. 34).

51. Большой диаметр конусной шпильки (рис. 35) длиной 120 мм равен 12,6 мм, а меньший — 10,2 мм. Чему равна конусность и под каким углом наклонены образующие к оси?

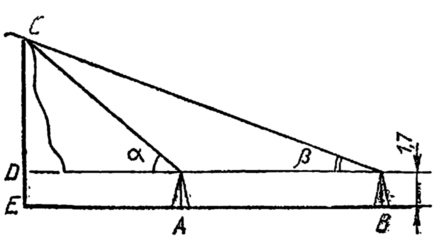

Рис. 34

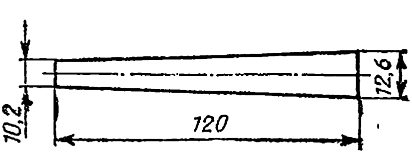

Рис. 35

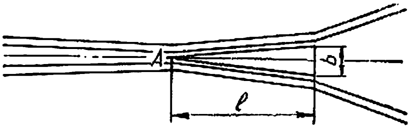

Рис. 36

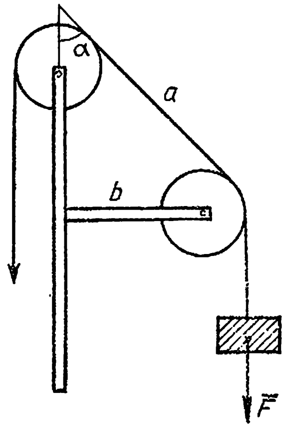

Рис. 37

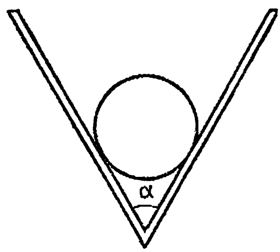

Рис. 38

52. На рисунке 36 изображены схема и деталь A стрелочного перевода, укладываемого на станциях при разветвлениях рельсового пути. На месте пересечения рельсов укладывается так называемая крестовина, геометрическая форма которой — равнобедренный треугольник. Фасон крестовины определяется маркой, т. е. отношением ширины крестовины b к ее длине l. Обычные марки крестовины: $\frac{b}{l}=\frac{1}{11}$ для путей, предназначенных для пассажирских поездов, и $\frac{1}{9}$ — для товарных. Найти углы при вершине этих двух типов крестовин.

53. Груз массой 240 кг поднимают при помощи двух неподвижных блоков (рис. 37). а) Найти силу растяжения троса a и сжатия балки b, если угол $\alpha=$ $=45°20'$. б) Как действующая на балку сила зависит от угла α? (Трение не учитывать.)

54. Найти угловую высоту Солнца, зная, что вертикально стоящий шест AB имеет длину 3 м, а его тень на поверхности земли — 5 м.

55. Шар лежит в желобе (рис. 38). Найти силы давления шара на стенки желоба, если масса шара 272 кг, а угол $\alpha=60°$.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

При вычислении площадей треугольников используются следующие формулы:

$$S=\frac{1}{2}b\cdot h_b;\quad S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};\quad S=r\cdot p,$$

где a, b, c — стороны треугольника; h_b — высота треугольника, опущенная на сторону b; $p=\frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр; r — радиус вписанного в треугольник круга. Если известны углы треугольника A, B, C, то для вычисления его площади можно воспользоваться одной из следующих формул:

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A;$$

$$S=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A};\quad S=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin(B+C)};$$

$$S=p^2\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

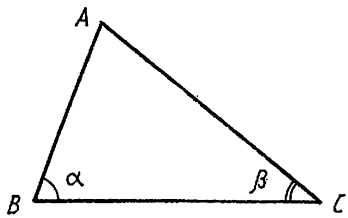

Рис. 39

Пример 1. Найти площадь земельного участка треугольной формы, если две смежные стороны ее образуют угол $\alpha=115°18'$ и соответственно равны 1235 и 1648 м.

Решение. Воспользовавшись формулой $S=\frac{1}{2}ab\sin C$, получим:

$$S=\frac{1}{2}\cdot 1235\cdot 1648\cdot\sin 115°18'=1235\cdot 824\sin(180°-64°42')=$$
$$=920\,031\ (\text{м}^2)=92\ (\text{га}).$$

Пример 2. Найти площадь лесного массива, имеющего форму треугольника ABC (рис. 39), если $BC=7{,}25$ км, а недоступная граница массива A видна под углами α и β, которые соответственно равны $69°30'$ и $39°24'$.

Решение. Решим по формуле

$$S=\frac{a^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}=\frac{7{,}25\sin 69°30'\sin 39°24'}{2\sin(69°30'+39°24')}.$$

Вычисление выполните с помощью микрокалькулятора.

Пример 3. Найти площадь земельного участка треугольной формы, если стороны его равны 1537, 2142, 1383 м.

Решение. Воспользуемся формулой

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где $p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{1537+2142+1383}{2}=2531$, $p-a=2531-1537=994$, $p-b=2531-2142=389$, $p-c=2531-1383=1148$. Тогда $S=\sqrt{2531\cdot 994\cdot 389\cdot 1148}$ (км²). Вычислив с помощью таблиц логарифмов (или на микрокалькуляторе), получим $S\approx 1{,}06$ км².

Задачи.

56. Найти количество кубометров делового леса на участке, имеющем форму треугольника, если одна его сторона равна 28,32 км, а вторая и третья границы с этой стороной соответственно образуют $\angle A=42°24'$ и $\angle B=72°29'$. Считать, что в каждом гектаре делового леса содержится примерно 200 м³.

57. Смежные стороны земельного участка равны 99,2 и 68,5 м, а угол, заключенный между ними, равен $28°20'$. Найти площадь участка.

58. Найти, сколько центнеров пшеницы собрали с участка, имеющего форму треугольника, стороны которого равны 421,5, 409,8, 335,9 м, если средний урожай с 1 га составляет 40 ц.

ТЕОРЕМЫ СИНУСОВ И КОСИНУСОВ. КОСОУГОЛЬНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

Для решения следующих задач используются формулы

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}, \quad c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos C\,[1].$$

Пример 1. Дано: a, B, C. Найти A, b, c, S.
Решение. Решение дается формулами

$$A=180^\circ-(B+C);\ b=\frac{a\sin B}{\sin(B+C)};$$
$$c=\frac{a\cdot\sin C}{\sin(B+C)};\ S=\frac{a^2\cdot\sin B\cdot\sin C}{2\sin(B+C)}.$$

Пример 2. Дано: a, b, C. Найти A, B, c, S.
Решение. Решение дается формулами

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos C;\ \sin A=\frac{a\cdot\sin C}{c};$$
$$\sin B=\frac{b\cdot\sin A}{a};\ S=\frac{1}{2}ab\cdot\sin C.$$

Пример 3. Даны три стороны a, b, c. Найти A, B, C и S.
Решение. Площадь треугольника находится по формуле

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где $p=\frac{a+b+c}{2}$. Углы определяются по формулам

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}};\quad \operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}};$$
$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}.$$

Пример 4. Дано: a, b, A. Найти B, C, c и S.
Решение. Решение дается формулами

$$\sin B=\frac{b\sin A}{a};\ C=180^\circ-(A+B);$$
$$c=\frac{a\sin C}{\sin A};\ S=\frac{ab}{2}\sin C.$$

Здесь следует рассмотреть два случая:

а) $a>b$. В этом случае данный угол A, как лежащий против большей из известных сторон, может быть острым и тупым. Из равенства $\sin B=\frac{b\sin A}{a}$ и условия $b<a$ следует $b\sin A<a$.

[1] a, b, c — стороны треугольника; A, B, C — соответствующие углы треугольника; S — площадь треугольника.

Поэтому $\sin B < 1$ и задача будет иметь решение независимо от величины угла B. Определяемый в этом случае угол может быть только острым.

б) $a < b$. Угол A должен быть острым, так как он лежит против стороны, которая меньше другой. Если определяемый угол B лежит против меньшей из данных сторон, то надо взять только острый угол; если же он лежит против большей стороны, то задача допускает два решения.

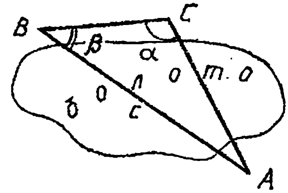

Рис. 40

Пример 5. На рисунке 40 показаны три населенных пункта A, B и C. Расстояния от B до A и от C до A непосредственно измерить невозможно (болото). Расстояние от B до C равно 12 км 350 м, а углы β и α соответственно равны $37°32'$ и $115°18'$. Найти AB и AC.

Решение. $A = 180° - (\beta + \alpha) = 180° - (37°32' + 115°18') = 27°10'$,

$$b = \frac{a \sin \beta}{\sin A} = \frac{12\,350 \cdot \sin 37°32'}{\sin 27°10'} \cong 16\,480 \text{ (м)},$$

$$c = \frac{a \sin \alpha}{\sin A} = \frac{12\,350 \cdot \sin 115°18'}{\sin 27°10'} \approx 24\,460 \text{ (м)}.$$

Задачи.

59. Чтобы найти высоту заводской трубы, к основанию которой нельзя подойти, провели базис $CD = b$, продолжение которого упирается в основание трубы. $\angle A_1C_1B = \alpha$, $\angle A_1D_1B = \beta$. Высота угломерного прибора равна h (рис. 41). Найти высоту заводской трубы.

60. Чтобы определить ширину реки A, наметили валун B, лежащий на одном берегу у самой воды, и от точки A, расположенной на противоположном берегу у самой воды, провели базис $AC = b$. Какова ширина реки, если $\angle BCD = \gamma$ и $\angle CAB = \alpha$ (рис. 42)?

61. Чтобы измерить расстояние от точки A в крепости до

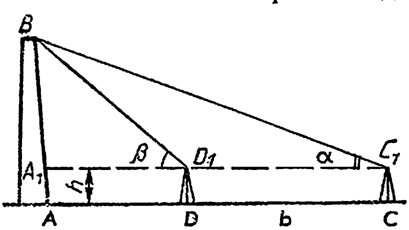

Рис. 41

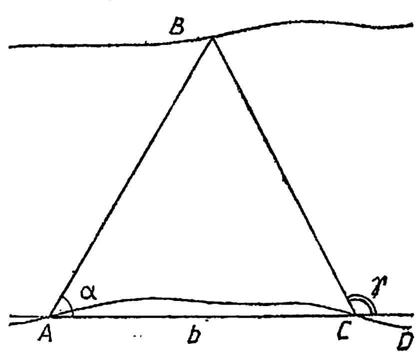

Рис. 42

неприятельского укрепления K, измерили базис $AB = 3{,}85$ км и $\angle KAB = 77°13'$ и $\angle KBA = 72°50'$. Определить расстояние AK.

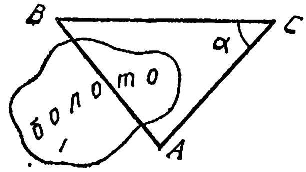

Рис. 43

62. Наблюдатель, находясь на некотором расстоянии от башни, определил, что ее угловая высота $20°50'$. Приблизившись к башне на 150 м, он вновь измерил ее угловую высоту и получил $51°30'$. Определить высоту башни, если в обоих случаях высота угломерного инструмента была 1,6 м.

63. Чтобы найти расстояние от пункта A до пункта B, между которыми пройти невозможно (болото), выбрали третий пункт C так, что из него были видны и доступны оба пункта A и B; затем измерили расстояния $BC = 300$ м, $AC = 240$ м и $\angle ACB = 48°$. Найти расстояние AB (рис. 43).

64. Вычислить площадь земельного участка, имеющего форму треугольника, если при съемке плана этого участка с масштабом $1:100\,000$ две его стороны изображены отрезками 5,6 см, 7,5 см и угол между ними равен $48°$.

65*. При съемке плана многоугольного участка полярным способом (за полюс взята вершина A многоугольника) измерением были получены следующие данные: сторона $AB = 250$ м, диагонали $AC = 360$ м, $AD = 430$ м, $AE = 390$ м и сторона $AF = 450$; азимуты этих направлений соответственно равны: $\angle NAB = 25°$, $\angle NAC = 53°$, $\angle NAD = 81°$, $\angle NAE = 125°$ и $\angle NAF = 140°$. Определить площадь участка $ABCDEF$ (рис. 44).

66. Определить модуль равнодействующей $\overline{F}$ двух сил $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$, действующих на материальную точку N под углом α друг к другу. Рассмотреть случаи, когда: а) $\alpha = 0$; б) $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

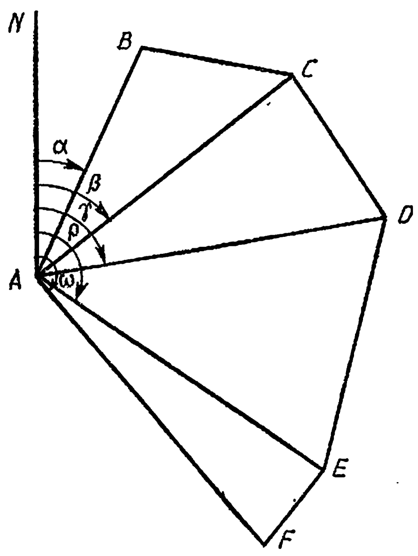

Рис. 44

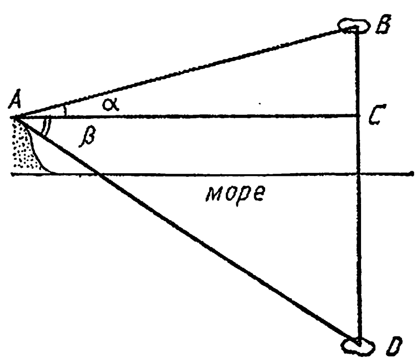

Рис. 45

67. Из одного пункта начали одновременно двигаться прямолинейко и равномерно два тела: одно со скоростью 6 м/с, другое — 4 м/с. Направления движения тел образуют угол 34°. Определить расстояние между телами по прошествии: а) 10 с; б) 20 с.

68. С крутого берега моря высотой 150 м над его уровнем (рис. 45) видно само облако и его отражение в воде. Угловая высота облака $\alpha = 14°30'$, угловое понижение его отражения $\beta = 32°40'$. Определить, на какой высоте над морем находится облако.

69. При съемке плана участка $ABCD$ полярным способом (за полюс взята одна из внутренних точек O участка) были получены следующие данные: $OA = 28$ м, $OB = 31$ м, $OC = 24$ м, $OD = 37$ м, $\angle AOB = 36°$, $\angle BOC = 78°$, $\angle COD = 110°$ и $\angle DOA = 136°$ (рис. 46). Вычертить план участка $ABCD$ и вычислить его площадь.

70. На тело действуют две силы $\overline{F}$ и $\overline{P}$, которые образуют между собой угол $\alpha = 64°24'$. Найти модуль равнодействующей этих сил и углы, которые образует равнодействующая с направлением данных сил, если $F = 85,48$ Н и $P = 68,16$ Н.

71. Сила $\overline{F}$ разложена на две составляющие, действующие под прямым углом друг к другу, одна из которых составляет с направлением силы $\overline{F}$ угол $\alpha = 46°$. Определить модули составляющих сил, если $F = 104$ Н.

72. На рисунке 47 схематически изображен подъемный кран, у которого стойка $a = 3,8$ м, а плечо $b = 6,5$ м. Угол α между стойкой и плечом равен 125°. Определить длину l подъемного троса.

73. Сила, модуль которой 800 Н, разложена на две составляющие, одна из которых равна по модулю 550 Н, а другая — 650 *Н*. Найти углы, образуемые направлениями составляющих с направлением данной силы.

74. Две силы 202,1 Н и 228,15 Н действуют на тело и приложены к одной точке тела под углом 50° друг к другу. Вычис-

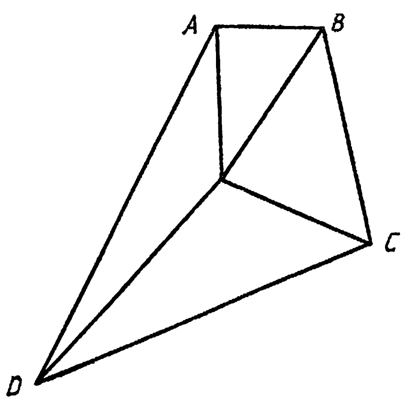

Рис. 46

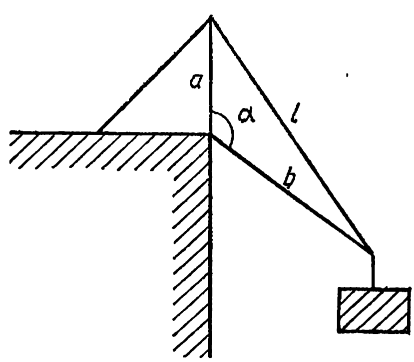

Рис. 47

лить модуль равнодействующей и углы между нею и действующими силами.

75. Найти расстояние от данной точки N до дома, если из этой точки верхний край одного из окон этого дома виден под углом α к горизонту, а нижний—под углом β и если высота окна равна h. Провести вычисления при $a=1,5$ м, $\alpha=16°50'$, $\beta=3°30'$.

76. Две силы $\bar{P}$ и $\bar{F}$ действуют на концы A и B прямолинейного рычага AB длиной a см. Сила $\bar{P}$, действующая на конец A, образует с рычагом угол α; сила $\bar{F}$, действующая на конец B,—угол β. На каком расстоянии от A нужно подпереть рычаг, чтобы он находился в равновесии (весом рычага пренебречь)?

ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ, ПЛОЩАДЬ КРУГА И ОБЪЕМЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР

Пример 1. Найти массу угля, помещающегося в углепогрузочном бункере, размеры которого даны на рисунке 48, если плотность угля 1,3 т/м³. Ответ округлить до 1 т.

Решение. $m=\rho\cdot V_{\text{бункера}}$, где ρ—плотность угля, V—объем бункера, m—масса угля. Плотность угля известна, следовательно, чтобы найти искомую величину, нужно определить объем бункера, состоящего из цилиндра и усеченного конуса.

$$V_{\text{цил}}=\pi r^2 h=\pi\cdot\frac{5^2}{4}\cdot 4=25\pi\ (\text{м}^3);$$

$$V_{\text{ус. кон}}=\frac{4}{3}\pi(2,5^2+0,5^2+2,5\cdot 0,5)=10,3\pi\ (\text{м}^3).$$

Тогда объем бункера равен

$$V_{\text{цил}}+V_{\text{ус. кон}}=35,3\pi\ (\text{м}^3).$$

$$m_{\text{бункера}}=144\ \text{т}.$$

Пример 2. Под водоем вырыли котлован в форме правильной усеченной пирамиды, верхнее и нижнее основания которой—квадраты со сторонами 40 и 28 м, а глубина водоема равна 2 м. Вычислить, сколько кубометров грунта вынули.

Решение. $V=\frac{1}{3}\cdot h(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2)$, где h—глубина водоема, S_1 и S_2—площади оснований.

$S_1=40^2=1600$ (м²), $S_2=28^2=784$ (м²). Тогда $V=2336$ м³.

Пример 3. Вычислить длину кабеля (каната), намотанного на барабан, если число слоев намотки равно 10, а количество витков в одном слое равно 15, диаметр барабана 40 см, диаметр кабеля 3 см. Ответ округлить до целых метров.

Решение. Длина намотки кабеля вычисляется по формуле $L=\pi mn(D+nd)$, где L—длина намотки кабеля, n—количество слоев намотки, m—количество витков, укладывающихся на дли-

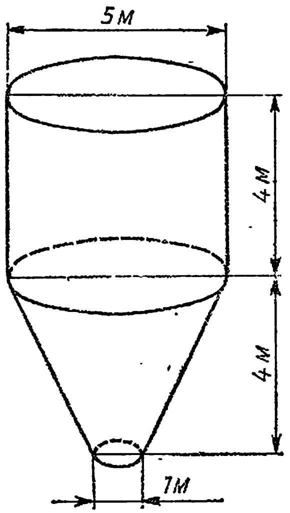

Рис. 48

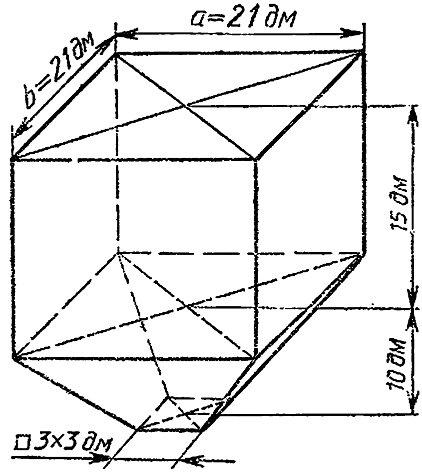

Рис. 49

не барабана в один ряд, D—диаметр барабана, d—диаметр кабеля.

Подставив в эту формулу известные данные, получим:

$$L = \pi mn\,(D + nd) = 40\,035\ (\text{см}) \cong 401\ (\text{м}).$$

Задачи.

77. На цилиндрический барабан подъемной машины радиусом 1,25 м и шириной 1600 мм наматывается круглый кабель радиусом 20 мм. Сколько метров этого кабеля покроют в один слой поверхность барабана?

78. Стальной канат диаметром 20 мм намотан на барабан в один слой диаметром 2,5 м. Сколько витков нужно смотать с барабана, чтобы длина смотанного каната равнялась 200 м?

79. Для постройки жилого дома нужно завезти 94 м^3 песка. Песок распределили равными кучками в форме конусов, высота которых 2 м, образующая 4 м. Сколько кучек песка требуется завезти?

80. Поперечное сечение шахтного ствола—круг радиусом 1,75 м. Найти объем грунта, вынутого при постройке ствола, если шахтный ствол вырыт на глубину 101,4 м.

81. Какое количество угля помещается в приемном бункере шахты (рис. 49), если плотность угля 1300 кг/м^3? Вычислить с точностью до 1 т.

82. Найти массу воздуха, подаваемого вентилятором местного проветривания в глухой забой горной выработки за 1 ч, если скорость движения воздуха по трубопроводу 4 м/с, а радиус трубопровода равен 0,3 м.

83. Квартиросъемщик решил в комнатах постелить дубовый паркет, а в коридоре, ванной комнате и санузле полы покрыть

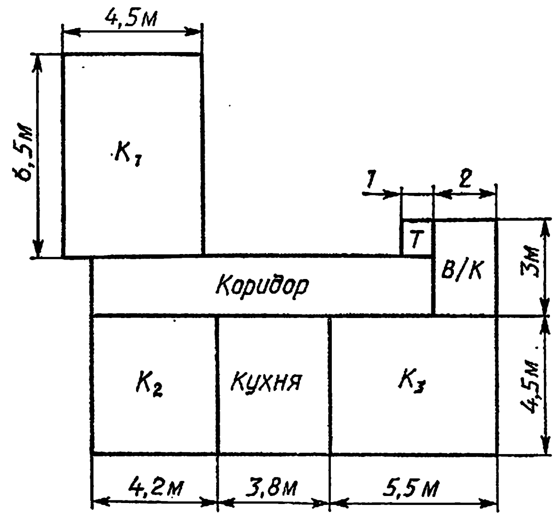

Рис. 50

ковровым линолеумом. Найти стоимость паркета и линолеума, если цена 1 м² паркета равна 11 р., а линолеума—3 р. 80 к. Размер квартиры в метрах дан на рисунке 50. Нужно учесть, что производственные отходы паркета 10%, линолеума 5%.

84. Для покраски пола квартиры (рис. 51) купили краски по цене 1 р. 80 к. за килограмм. На сколько рублей купили краски, если на 1 м² расходуется 200 г краски?

85. Для парка культуры и отдыха нужно сделать 1000 урн цилиндрической формы без крышек. Сколько листов железа размером 140×70 см² потребуется для их изготовления, если диа-

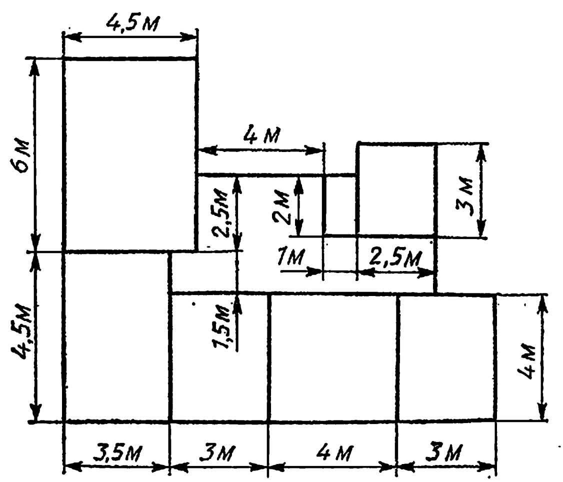

Рис. 51

метр урны равен 32 см, высота 50 см и производственные отходы составляют 10%?

86. Поперечное сечение вентиляционного штрека представляет собой равнобочную трапецию с основаниями 4 и 3 м и углом при основании 78°. Сколько кубических метров воздуха пройдет через вентиляционный штрек за 1 ч, если скорость воздушного потока 5 м/с?

§ 10. ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИМЕНЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ К ПРИБЛИЖЕННЫМ ВЫЧИСЛЕНИЯМ

В приближенных вычислениях большую роль играет следующая формула:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\cdot\Delta x = dy,$$

где Δx — приращение аргумента, Δy — приращение функции, dy — дифференциал функции.

Пример 1. Вычислить приближенное значение приращения функции $y = 3x + 7$ при $x = 10$ и $\Delta x = 0{,}001$.

Решение. Используя приведенную формулу, получим:

$$\Delta y = (3x^3 + 7)'\,|_{x=x_0}\,\Delta x = 9x^2\,|_{x=x_0}\,\Delta x = 9\cdot 10^2\cdot 0{,}001 = 0{,}9.$$

Пример 2. Шар радиусом 20 см был нагрет, в результате чего радиус его увеличился на 0,01 см. Вычислить, на сколько увеличился объем шара.

Решение. Объем шара определяется по формуле $V = V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Так как приращение аргумента Δr — величина малая, то приращение функции приближенно определяется равенством

$$\Delta V = \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)'\Big|_{r=r_0}\Delta r = 4\pi r^2\,|_{r=r_0}\,dr = 16\pi\ \text{см}^3.$$

АБСОЛЮТНАЯ И ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ПОГРЕШНОСТИ

Пример 3. Сравнить относительные погрешности при вычислении площади круга радиусом 100 см, рассматривая: а) абсолютную погрешность, равную приращению площади круга; б) абсолютную погрешность, равную дифференциалу площади круга, если абсолютная погрешность при измерении радиуса равна 0,5 см.

Решение. а) Вычислим приращение площади круга ΔS и относительную погрешность $\frac{\Delta S}{S}$. Известно, что $S = 2\pi r^2$. Допустим, что при измерении радиуса круга абсолютная погрешность не превышает $\pm 0,5$ см

$$\Delta S = \pi (r + \Delta r)^2 - \pi r^2 = \pi r^2 + 2\pi r \cdot \Delta r + \pi (\Delta r)^2 - \pi r^2 =$$
$$= \pi (2r \cdot \Delta r + (\Delta r)^2) = \pi (2 \cdot 100 \cdot 0,5 + 0,25) = 100,25\pi;$$
$$\frac{\Delta S}{S} = \frac{100,25\pi}{\pi \cdot 100^2} = 1,0025.$$

б) Найдем дифференциал dS и относительную погрешность $\frac{dS}{S}$ вычисления площади круга:

$$dS = 2\pi r \cdot \Delta r = 2\pi \cdot 100 \cdot 0,5 = 100\pi; \quad \frac{dS}{S} = \frac{2\pi r \cdot \Delta r}{\pi r^2} = 2 \cdot \frac{\Delta r}{r}.$$

Из этого следует, что относительная погрешность при вычислении площади круга равна удвоенной относительной погрешности, полученной при измерении радиуса:

$$\frac{dS}{S} = 2 \cdot \frac{dr}{r} = 0,01.$$

в) Вычислим относительную погрешность при замене приращения ΔS дифференциалом dS:

$$\Delta S - dS = 100,25\pi - 100\pi = 0,25\pi;$$
$$\frac{\Delta S - dS}{dS} = \frac{0,25\pi}{100\pi} = 0,0025.$$

Относительная погрешность приближенного вычисления равна 0,25%.

Указание. Во втором случае вычисления производятся значительно проще, но, несмотря на это, достигается высокая точность результата. Чем меньше приращение аргумента, тем точность результата выше. Поэтому при малых значениях приращения аргумента вычисляют не точное значение приращения функции, а ее дифференциал.

Пример 4. Предположим, что при измерении стороны квадрата допущена погрешность в 1%. По полученному приближенному значению результата измерения вычислена площадь квадрата. Найти величину погрешности вычисления площади квадрата.

Решение. Пусть x—точное значение стороны квадрата, а $x + \Delta x$—результат ее измерения. Тогда ошибка измерения $\Delta x = \pm 0,1x$. Ошибка ΔS, допущенная при измерении площади S квадрата, приближенно равна: $\Delta S = 2x\Delta x = 2x(\pm 0,01x) = \pm 0,02x^2 = \pm 0,02S$, т. е. составляет 0,2% от площади.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПО ПРИБЛИЖЕННЫМ ФОРМУЛАМ

При решении задач этого раздела используются следующие приближенные формулы:

1) $\sin \alpha \approx \alpha$; 4) $\sqrt[n]{1 + \alpha} \approx 1 + \frac{1}{n}\alpha$;

2) $(1+\alpha)^n \approx 1+n\alpha$; 5) $\sqrt[n]{1-\alpha} \approx 1-\frac{1}{n}\alpha$;

3) $(1-\alpha)^n \approx 1-n\alpha$; 6) $\lg(1+\alpha) \approx \alpha$.

Пример 5. Вычислить $\sqrt[3]{0{,}964}$.

Решение. $\sqrt[3]{0{,}964}=\sqrt[3]{1-0{,}036} \approx 1-\frac{1}{3}\cdot 0{,}036=0{,}988$.

Пример 6. Вычислить $1{,}004^2$.

Решение. $1{,}004^2=(1+0{,}004)^2 \approx 1+2\cdot 0{,}004=1{,}008$.

Задачи.

1. Найти приближенное значение приращения площади квадрата, если сторону квадрата увеличить с 5 до 5,01 см.

2. Найти приближенное значение приращения площади круга, если радиус его изменяется от 50 до 50,1 см.

3*. В круговом секторе радиус $r=100$ см и центральный угол $\alpha=60°$. Найти, на сколько изменится площадь данного сектора, если его радиус увеличить на 1 см.

4*. Сторона квадрата $x=2{,}4$ м $\pm$ 5 см. С какой абсолютной и относительной погрешностями можно вычислить площадь данного квадрата?

5*. В круговом секторе радиус $r=100$ см и центральный угол $\alpha=60°$. На сколько изменится площадь данного сектора, если угол уменьшить на $30'$?

6*. Шар радиусом 9 см был нагрет, в результате чего объем его увеличился на $32{,}4\pi$ см^3. Найти, на сколько увеличился радиус шара.

7. Вычислить, на сколько увеличился объем куба, если ребро куба увеличилось со 100 до 110 см.

8*. Найти, на сколько увеличилось ребро куба, если объем увеличился с 27 до 27,2 м^3.

9*. Площадь квадрата уменьшилась с 16 до 15,82 м^2. Найти, на сколько изменилась сторона квадрата.

10. Дан прямоугольный параллелепипед с квадратным основанием, сторона основания которого 20 см, а высота 10 см. Вычислить, на сколько увеличился его объем, если сторону основания удлинить на 0,02 см.

11. Радиус основания прямого конуса равен 15 см, а высота его равна 20 см. Найти, на сколько увеличится его объем, если радиус основания увеличить на 0,04 см.

12*. При нагревании куба его объем увеличился на 0,06 своего объема. Вычислить удлинение ребра куба, если до нагревания ребро куба равнялось 10 см.

13*. Какой процент составляет погрешность, полученная при вычислении площади круга, если при измерении его радиуса допущена погрешность в 1%?

14*. При нагревании объем шара увеличился на 0,0024 первоначального объема. Вычислить, на сколько процентов увеличилась длина его радиуса.

15*. При нагревании объем куба увеличился на 6% от первоначального объема. Вычислить, на сколько процентов увеличилось его ребро.

16. Шар радиусом 20 см был нагрет, в результате чего радиус его удлинился на 0,01 см. Вычислить, на сколько увеличился объем шара.

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ

Пусть дана функция $y=f(x)$. Мы опишем последовательность действий, которые надо осуществить, чтобы исследовать эту функцию на максимум и минимум.

1) Найти производную $y'=f'(x)$.

2) Приравнять производную нулю. Найти действительные корни $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ уравнения $f'(x)=0$.

3) Расположить эти корни в порядке возрастания и определить промежутки возрастания и убывания.

4) Вычислить знаки чисел $f'(x_1-\varepsilon)$ и $f'(x_1+\varepsilon)$, где ε—достаточно малое число. При этом если $f'(x_1-\varepsilon)>0$, а $f'(x_1+\varepsilon)<0$, то функция $y=f(x)$ при $x=x_1$ имеет максимум; если $f'(x_1-\varepsilon)<0$, а $f'(x_1+\varepsilon)>0$, то функция $y=f(x)$ при $x=x_1$ имеет минимум; если $f'(x_1-\varepsilon)<0$ и $f'(x_1+\varepsilon)<0$ либо $f'(x_1-\varepsilon)>0$ и $f'(x_1+\varepsilon)>0$, то функция при $x=x_1$ не имеет ни максимума, ни минимума.

Аналогично проводится исследование для x_2, x_3 и т. д.

5) Найти максимальные и минимальные значения функции, поставив в $y=f(x)$ вместо аргумента x те значения, при которых достигается максимум или минимум.

Пример 1. Исследовать на максимум и минимум функцию

$$y=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-4x+6.$$

Решение. 1) $y'=x^2-3x-4$.

2) $x^2-3x-4=0$, откуда $x_1=-1$, $x_2=4$.

3) Промежутками монотонности являются $(-\infty; -1)$, $(-1; 4)$ и $(4; \infty)$. 4—5) Составим таблицу результатов исследования:

Промежутки возрастания и убывания		$-\infty<x<-1$	-1	$-1<x<4$	4	$4<x<\infty$
Знаки функции	y'	$+$	0	$-$	0	
Возрастание и убывание	y	↗	$8\frac{1}{6}$	↘	$-12\frac{2}{3}$	
max или min значений			max		min	

Обозначив точки графика функции, соответствующие максимуму и минимуму, буквами A и B, напишем: $A\left(-1;\ 8\frac{1}{6}\right)$ и $B\left(4;\ -12\frac{2}{3}\right)$.

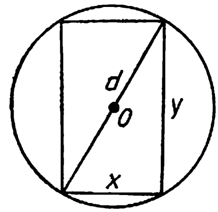

Рис. 52

Пример 2. Известно, что прочность на горизонтальный изгиб балки прямоугольного перпендикулярного сечения пропорциональна произведению ширины балки на квадрат высоты. Найти отношение ширины к высоте поперечного сечения наиболее прочной балки, которую можно вырезать из цилиндрического бревна диаметром d см.

Решение. На рисунке 52 изображено сечение балки. Пусть x — ширина, y — высота перпендикулярного сечения балки. Из прямоугольного $\triangle ABC$ по теореме Пифагора имеем $x^2+y^2=d^2$. Прочность σ балки определяется соотношением $\sigma=kxy^2=$ $=kx(d^2-x^2)=kd^2x-kx^3$, где k — коэффициент пропорциональности, зависящий от материала.

Исследуем функцию $\sigma(x)=kd^2x-kx^3$ на максимум и минимум.

1) $\sigma'(x)=kd^2-3kx^2=k(d^2-3x^2)$.

2) $k(d^2-3x^2)=0$, откуда $x_1=\frac{d}{\sqrt{3}}$ и $x_2=-\frac{d}{\sqrt{3}}$.

3) Второй корень отбрасываем, так как отрицательное решение не имеет смысла.

4) Пусть $x=\frac{d}{2}$, тогда

$$\sigma'(x)=k\left(d^2-\frac{d^2}{4}\right)>0.$$

Пусть $x=\frac{3d}{2}$, тогда

$$\sigma'(x)=k\left(d^2-\frac{9d^2}{4}\right)<0.$$

Следовательно, знак производной меняется с «+» на «—» и при $x_1=\frac{d}{\sqrt{2}}$ функция имеет максимум.

5) Чтобы найти отношение ширины балки к высоте перпендикулярного поперечного сечения, нужно найти высоту y:

$$y=\sqrt{d^2-\left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{d\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Следовательно,

$$\frac{x}{y}=\frac{\frac{d}{\sqrt{3}}}{\frac{d\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\approx\frac{5}{7}.$$

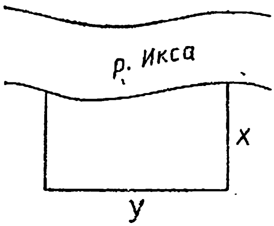

Рис. 53

Таким образом, балка имеет наибольшую прочность на горизонтальный изгиб, если отношение ширины к высоте есть 5:7.

Пример 3. Колхоз из луговых земель, расположенных на берегу реки Икса, решил отвести под овощные культуры 8 га. Найти ширину и длину участка прямоугольной формы (рис. 53), отводимого под овощные культуры, чтобы на ограждение этого участка израсходовать наименьшее количество строительного материала.

Решение. Пусть x—длина одной стороны искомого прямоугольного участка, тогда $\frac{80\,000}{x}$—длина другой стороны участка.

Так как одной из границ участка является река, то периметр участка $P(x) = 2x + \frac{80\,000}{x} = \frac{2x^2 + 80\,000}{x}$.

Исследуем функцию $P(x)$ на максимум и минимум.

1) $P'(x) = \frac{2x^2 - 80\,000}{x^2}$.

2) $\frac{2x^2 - 80\,000}{x^2} = 0$, откуда $x_1 = 200$, $x_2 = -200$.

3—5) Так как $x_2 = -200$ не удовлетворяет условию задачи, то достаточно легко установить, что при $x_1 = 200$ функция $P(x)$ имеет максимум. Другая сторона участка равна $\frac{80\,000}{200} = 400$ (м).

Таким образом, наименьшая длина изгороди равна $200 + {}$ $+ 200 + 400 = 800$ (м) и при этом на ее постройку будет израсходовано наименьшее количество строительного материала.

Пример 4. Сила тока I в цепи определяется по закону Ома $I = \frac{U}{R + R_1}$, где R—внешнее, а R_1—внутреннее сопротивление. Мощность, выделяющаяся в нагрузке R, выражается формулой

$$P = I^2 R = \frac{U^2 R}{(R + R_1)^2}.$$

Вычислить значение R, при котором мощность будет наибольшая.

Решение. Заданную функцию $P = \frac{U^2 R}{(R + R_1)^2}$ исследуем на максимум и минимум по переменной R.

1) $P' = U^2 \frac{R_1 - R}{(R + R_1)^3}$.

2) $U^2 \cdot \frac{R_1 - R}{(R + R_1)^3} = 0$, откуда $R_1 = R$.

3) При $R < R_1$ производная $P' > 0$; при $R > R_1$ производная $P' < 0$, следовательно, при $R = R_1$ мощность будет наибольшая.

Задачи.

17. Участок земли прямоугольной формы площадью 40 000 м^2 нужно окопать вдоль всей границы рвом. Какой размер должен иметь участок, чтобы длина рва была наименьшей?

18. Из листового железа квадратной формы размером 60×60 см^2 нужно вырезать по четырем углам квадратики так, чтобы из оставшейся части, сгибая выступы, изготовить коробку наибольшей емкости. Каковы должны быть размеры вырезанных квадратиков?

19. К заводской стене нужно пристроить помещение прямоугольной формы под новый цех. Каково должно быть соотношение ширины к длине нового цеха, чтобы на его строительство израсходовать наименьшее количество строительного материала?

20. Требуется изготовить ящик с крышкой объемом 576 дм^3, стороны основания которого должны относиться как $1:2$. Каковы должны быть его стороны, чтобы полная поверхность ящика была наименьшей?

21. Найти радиус основания и высоту цилиндра объемом 27π дм^3, имеющего наименьшую полную поверхность.

22*. Сечение шлюзового канала имеет вид прямоугольника, заканчивающегося полукругом. При каком радиусе полукруга площадь поперечного сечения канала будет максимальной, если периметр сечения равен 9 м?

23. Объем правильной четырехугольной призмы равен 27 дм^3. Какова должна быть сторона основания призмы, чтобы полная поверхность ее была наименьшей?

24. Заготовлен строительный материал для изгороди длиной l. Необходимо этим строительным материалом огородить участок прямоугольной формы наибольшей площади. Каким должен быть размер этого участка?

25. Тело движется по закону $S = 100t + 18t^2 - 2t^3$. Найти наибольшую скорость движения тела.

26*. Известно, что сопротивление на вертикальное сжатие балки пропорционально площади сечения. Каковы должны быть стороны перпендикулярного прямоугольного сечения балки, чтобы сопротивление на сжатие было наибольшим, если периметр сечения фиксирован?

§ 11. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ И ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛЫ

ЗАДАЧИ, РЕШАЕМЫЕ С ПОМОЩЬЮ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Неопределенный интеграл функции $f(x)$ обозначается $\int f(x)\,dx$ и определяется как функция $F(x)$, для которой $F'(x) = f(x)$. Основные свойства неопределенного интеграла:

1) $d\int f(x) = f(x)\,dx$.

2) $\int dF(x) = F(x) + C$, где C — произвольная постоянная.

3) $\int Af(x)\,dx = A\int f(x)\,dx$, где A — постоянный множитель.

4) $\int (f_1(x) \pm f_2(x))\,dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx$.

Пример 1. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $M(2;\ 4)$, зная, что угловой коэффициент касательной к этой кривой в любой ее точке $(x;\ y)$ равен $x^2 - 3x + 2$.

Решение. Известно, что угловой коэффициент касательной $k = y' = \frac{dy}{dx}$,

следовательно,

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - 3x + 2,$$

откуда $dy = (x^2 - 3x + 2)\,dx$. Проинтегрировав обе части равенства, получим $y = \int (x^2 - 3x + 2)\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x + C$, следовательно,

$$y = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x + C. \qquad (1)$$

Мы нашли множество интегральных кривых, и нужно выбрать ту кривую, которая проходит через точку $M(2;\ 4)$. Для этого нужно найти значение C, подставив в уравнение (1) координаты точки M $(x=2,\ y=4)$, отсюда искомое уравнение

$$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + 3\frac{1}{3}.$$

Пример 2. С поверхности земли вертикально вверх бросили тело со скоростью v_0. Найти скорость движения тела в момент времени t.

Решение. Направим ось координат Ox вертикально вверх. Тогда проекция начальной скорости на эту ось будет $v_{Ox} = v_0$, а проекция ускорения свободного падения $g_x = -g$, так как ускорение свободного падения направлено вниз. Отсюда $\frac{dv_x}{dt} = g_x$, или $\frac{dv}{dt} = -g$, поэтому $dv_x = -g\,dt$.

$$\int dv_x = \int (-g\,dt),$$

или

$$v_x = -gt + C. \qquad (2)$$

Из условия задачи следует, что при $t = 0$ $v_x = v_{Ox} = v_0$. Подставив значения t и v_0 в равенство (2), найдем значение C:

$$v_0 = -g0 + C, \quad \text{откуда } C = v_0.$$

Подставив в равенство (2) значение C, получим:

$$v_x = v_0 - gt.$$

П р и м е р 3. Материальная точка движется прямолинейно с ускорением $a = 3t^2 - 3t + 1$. В момент времени $t = 0$ начальная скорость 2м /с, расстояние от начала отсчета $s_0 = 5$ м. Найти скорость и пройденный путь в момент времени $t = 3$ с.

Р е ш е н и е. Найдем скорость и путь, пройденный материальной точкой.

Имеем $a = \frac{dv}{dt}$, откуда

$$dv = adt = (3t^2 - 3t + 1)\,dt.$$

Тогда

$$\int dv = \int (3t^2 - 3t + 1)\,dt = 3\frac{t^3}{3} - 3\frac{t^2}{2} + t = t^3 - \frac{3}{2}t^2 + t + C,$$

откуда

$$v = t^3 - \frac{3}{2}t^2 + t + C.$$

Так как при $t = 0$ начальная скорость $v_0 = 2$ м/с, то $C = 2$. Следовательно, $v = t^3 - \frac{3}{2}t^2 + t + 2$.

При $t = 3$ $v = 3^3 - \frac{3}{2}\cdot 3^2 + 2 = 27 - 13{,}5 + 2 = 15{,}5$ (м/с).

Найдем путь, пройденный материальной точкой за 3 с:

$$v = \frac{ds}{dt} = t^3 - \frac{3}{2}t^2 + t + 2,$$

откуда

$$ds = \left(t^3 - \frac{3}{2}t^2 + t + 2\right)dt.$$

Тогда

$$\int ds = \int \left(t^3 - \frac{3}{2}t^2 + t + 2\right)dt = \int t^3 dt - \int \frac{3}{2}t^2 dt + \int t\,dt + \int 2\,dt,$$

откуда

$$s = \frac{t^4}{4} - \frac{3}{2}\cdot\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + 2t + C_1.$$

Из условия задачи следует, что при $t = 0$ путь $s = s_0 = 5$ м, и, значит, $C_1 = 5$. Поэтому путь, пройденный телом за время t, выражается формулой

$$s = \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^3 + 2t + 5.$$

Найдем путь, пройденный телом за 3 с:

$$s = \frac{1}{4}\cdot 3^4 - \frac{1}{2}\cdot 3^3 + \frac{1}{2}\cdot 3^2 + 2\cdot 3 + 5 = 22\frac{1}{4}\ (\text{м}).$$

П р и м е р 4. Найти кинетическую энергию тела, движущегося с ускорением $a = t^2 - 2t + 2$ в момент времени $t = 3$ с, если масса тела равна 2 кг, а скорость тела при $t = 0$ равна 1 м/с.

Решение. Имеем $dv = a\,dt$, или $dv = (t^2 - 2t + 2)\,dt$. Отсюда

$$\int dv = \int (t^2 - 2t + 2)\,dt = \frac{t^3}{3} - 2\frac{t^2}{2} + 2t + C.$$

Тогда

$$v = \frac{1}{3}t^3 - t^2 + 2t + C.$$

Найдем значение C. Так как при $t = 0$ скорость $v = 1$ м/с, то $C = 11$. Следовательно, скорость движения определяется уравнением

$$v = \frac{1}{3}t^3 - t^2 + 2t + 1.$$

Вычислим кинетическую энергию. Для этого нужно знать скорость движения тела при $t = 3$ с: $v(3) = \frac{1}{3}\cdot 3^3 - 3^2 + 2\cdot 3 + 1 = 7$ (м/с). Тогда кинетическая энергия равна:

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{2\cdot 7^2}{2} = 49 \text{ (Дж)}.$$

Задачи.

1. Угловой коэффициент касательной, проведенной к кривой линии в каждой ее точке, равен абсциссе этой точки. Найти уравнение этой кривой, проходящей через точку $P(2;\ 1)$.

2. Найти уравнение кривой, если угловой коэффициент касательной, проведенной через точку $(1;\ -5)$, лежащую на этой кривой, определяется формулой $K = 1 - x$.

3. Найти из множества кривых, соответствующих неопределенному интегралу $\int (3x - 2)\,dx$, кривую, которая проходит через точку $(-3;\ 4)$.

4. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $(0;\ -2)$, лежащую на этой кривой, если угловой коэффициент касательной в любой ее точке $(x;\ y)$ равен $2x - 1$.

5. Проекция скорости тела определяется уравнением $v_x = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$, где $\alpha = 2$ м/с^3, $\beta = 1$ м/с^2, $\gamma = 1$ м/с. Найти путь, пройденный телом за время $t = 3$ с, если за $t = 2$ с тело прошло 12 м.

6. Проекция скорости тела задана уравнением $v_x = (t^2 - 2t + 3)$. Найти уравнение для координаты тела, если к моменту начала отсчета времени точка прошла путь $s = 3$ м.

7. Скорость v движения тела задана уравнением $v = (3t^2 + 4t)$. Найти $x = f(t)$, если оно за время $t = 2$ с проходит путь s, равный 10 м.

8*. Найти расстояние, пройденное телом за t секунд, если оно брошено вертикально вниз с начальной скоростью 30 м/с.

9. Скорость тела задана формулой $v = 5\cos t$. За время $t = \frac{\pi}{6}$ с тело прошло 15 м. Найти закон движения тела.

10*. Тело движется с ускорением $a=\left(\frac{1}{3}t^2-\frac{1}{2}t+2\right)$. Найти кинетическую энергию движущегося тела в момент времени $t=5$ с, если масса тела равна 10 кг, а скорость тела при $t=2$ с равна 10 м/с.

ЗАДАЧИ, РЕШАЕМЫЕ С ПОМОЩЬЮ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Ниже приводятся основные свойства определенного интеграла, используемые при решении задач этого раздела:

$$1)\ \int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(t)\,dt.$$

$$2)\ \int_a^a f(t)\,dt=0.$$

$$3)\ \int_b^a f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx.$$

Если отрезок интегрирования $(a;\ b)$ разбит на конечное число частичных отрезков, то определенный интеграл, взятый по отрезку $[a;\ b]$, равен сумме определенных интегралов, взятых по всем его частичным отрезкам.

$$4)\ \int_a^b Af(x)\,dx=A\int_a^b f(x)\,dx\ \ (A\text{ — постоянный множитель}).$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ФИГУР, ОГРАНИЧЕННЫХ ГРАФИКАМИ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ В ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ

Если фигура расположена над осью Ox и ограничена ею графиком функции $y=f(x)\,(a\leqslant x\leqslant b)$ и двумя прямыми $x=a$ и $x=b$ (рис. 54), то ее площадь находится по формуле

$$S=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Если фигура расположена под осью Ox и ограничена ею графиком функции $y=f(x)\,(a\leqslant x\leqslant b)$ и двумя прямыми $x=a$, $x=b$

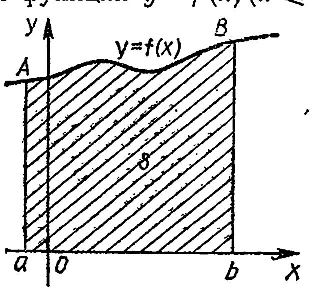

Рис. 54

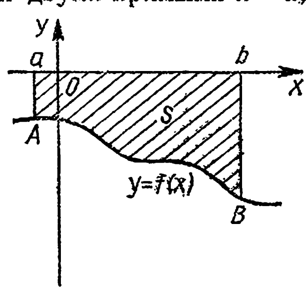

Рис. 55

(рис. 55), то ее площадь находится по формуле

$$S=\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|.$$

Если часть фигуры расположена над осью Ox, а часть — под осью Ox и если она ограничена Ox, графиком функции $y=f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ и двумя прямыми $x=a$ и $x=b$ (рис. 56), то ее площадь вычисляется по формуле

$$S=S_1+S_2=\int_a^c f(x)\,dx+\left|\int_c^b f(x)\,dx\right|,$$

где C является корнем уравнения $f(x)=0$.

Если фигура ограничена двумя пересекающимися кривыми, являющимися графиками функций $y=f(x)$ и $y=\varphi(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ (рис. 57), то ее площадь вычисляется по формуле

$$S=\int_{aANBb}-\int_{aAPBb}=\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b \varphi(x)\,dx,$$

где пределы интегрирования a и b являются решениями системы уравнений $\begin{cases} y=f(x), \\ y=\varphi(x). \end{cases}$

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, заключенной между графиком функции $y=\frac{1}{3}x^2+2$, осью Ox и прямыми $x=1$ и $x=3$ (рис. 58).

Решение. Искомая площадь

$$S=\int_1^3\left(\frac{1}{3}x^2+2\right)dx=\int_1^3\frac{1}{3}x^2\,dx+\int_1^3 2\,dx=$$
$$=\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3}+2x\right]_1^3=\left[\frac{1}{9}x^3+2x\right]_1^3=$$
$$=\left(\frac{1}{9}\cdot 3^3+2\cdot 3\right)-\left(\frac{1}{9}\cdot 1^3+1\cdot 2\right)=6\frac{8}{9}.$$

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, заключенной между графиками функций $y=x^2-4$ и $y=0$.

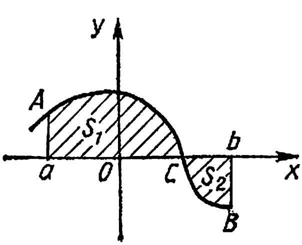

Рис. 56

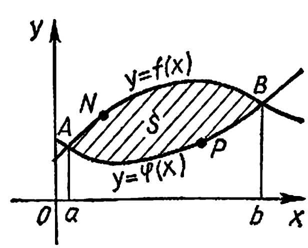

Рис. 57

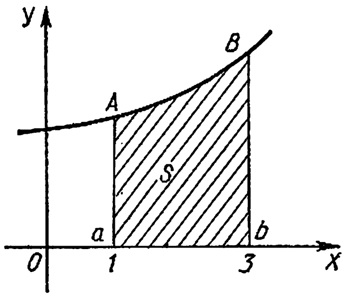

Рис. 58

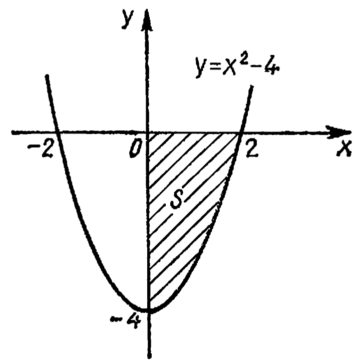

Рис. 59

Решение. Построим график функции $y=x^2-4$ и, решив уравнение $x^2-4=0$, найдем координаты точки пересечения графика данной функции с осью Ox. Корни $x_1=-2$ и $x_2=2$ являются пределами интегрирования.

Фигура (рис. 59) симметрична относительно оси Oy, а потому искомая площадь

$$S_{ACB}=-\int_{-2}^{2}(x^2-4)\,dx=-2\int_{0}^{2}(x^2-4)\,dx=$$
$$=2\left(\left|\frac{1}{3}\cdot 2^3-2\cdot 4\right|-\left|\frac{1}{3}\cdot 0^3-4\cdot 0\right|\right)=10\frac{2}{3}.$$

Пример 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=\frac{1}{4}x^3-2$, осью Ox и прямыми $x_1=-2$ и $x_2=3$. Построить рисунок.

Решение. Построить график функции на отрезке $[-2;\ 3]$ (рис. 60). Из рисунка видно, что $S=|S_1|+S_2$. Чтобы найти пределы интегрирования, нужно определить абсциссу точки C, которая является корнем уравнения $\frac{1}{4}x^3-2=0$, откуда $x=2$, следовательно,

$$S=|S_1|+S_2=\left|\int_{-2}^{2}\left(\frac{1}{4}x^3-2\right)dx\right|+\int_{2}^{3}\left(\frac{1}{4}x^3-2\right)dx=$$
$$=\left|\frac{1}{16}x^4-2x\right|\Bigg|_{-2}^{2}+\left(\frac{1}{16}x^4-2x\right)\Bigg|_{2}^{3}=$$
$$=\left|\left(\frac{1}{16}\cdot 2^4-2\cdot 2\right)-\left(\frac{1}{16}(-2)^4-2\cdot(-2)\right)\right|+$$
$$+\left(\frac{1}{16}\cdot 3^4-2\cdot 3\right)-\left(\frac{1}{16}\cdot 2^4-2\cdot 2\right)=$$
$$=|1-4-1-4|+\frac{81}{16}-6-1+4=10\frac{1}{16}.$$

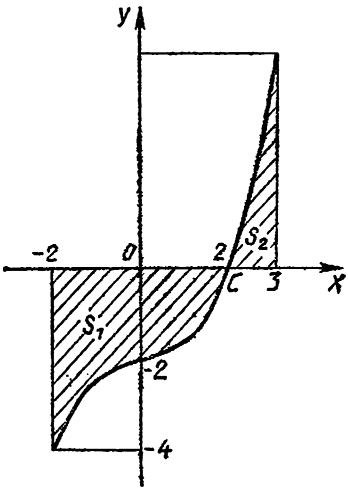

Рис. 60

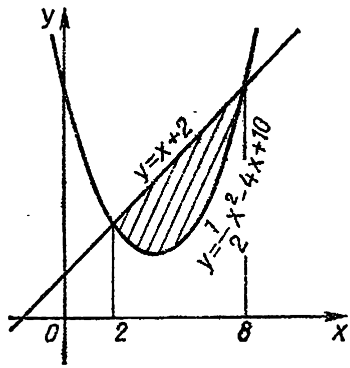

Рис. 61

Пример 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y=\frac{1}{2}x^2-4x+10$ и $y=x+2$. Сделать рисунок.

Решение. Построим графики данных функций в одной системе координат (рис. 61). Найдем абсциссы точек пересечения A и B, решив систему уравнений

$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x^2-4x+10, \\ y=x+2, \end{cases}$$

откуда $\frac{1}{2}x^2-4x+10=x+2$, $x^2-10x+16=0$, $x_1=2$ и $x_2=8$.

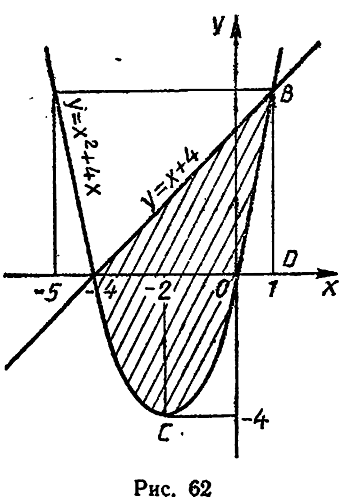

Рис. 62

Следовательно, $a=x_1=2$ и $b=x_2=8$. Искомая площадь равна

$S=S_1-S_2$.

$$S_1=\int_2^8 (x+2)\,dx=\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\Big|_2^8=42,$$

$$S_2=\int_2^8 \left(\frac{1}{2}x^2-4x+10\right)dx=24,$$

$S=18$.

Пример 5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y=x+4$ и $y=x^2+4x$. Построить рисунок.

Решение. Построим графики функций $y=x^2+4x$ и $y=x+4$ (рис. 62).

Из рисунка видно, что нужно вычислить площадь фигуры ABC; пределы интегрирования равны $x_1=1$ и $x_2=-4$.

$$S=\int_{-4}^{1}((x+4)-(x^2+4x))\,dx=\int_{-4}^{1}(4-3x-x^2)\,dx=20\frac{5}{6}.$$

Пример 6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной волной синусоиды и осью Ox.

Решение. Функция $\sin x \geqslant 0$ при $0 \leqslant x \leqslant \pi$ и $\sin x \leqslant 0$ при $\pi < x \leqslant 2\pi$. Поэтому

$$S=\int_0^{\pi}\sin x\,dx+\int_{\pi}^{2\pi}(-\sin x)\,dx=-\cos x\Big|_0^{\pi}+\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}=4.$$

Задачи.

11. Вычислить площадь фигуры, заключенной между ветвью графика функции $y=x^2$, прямыми $x=0$, $x=3$ и осью Ox.

12. Найти площадь фигуры, образованной осью Ox и графиком функции $y=x^2-10x$.

13. Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=16x^2$, прямыми $x=0$ и $x=6$ и осью Ox.

14. Найти площадь фигуры, заключенной между графиком функции $y=\frac{1}{2}x^2+2$, прямыми $x=1$ и $x=4$ осью Ox.

15*. Вычислить площадь фигуры, ограниченной осью Ox и графиком функции $y=x^2-5x+4$. Сделать чертеж.

16. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=\frac{1}{2}x^2+3x+1$, прямыми $x=0$, $x=4$ и осью Ox.

17*. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=4x-x^2$ и осью Ox.

18*. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функций $y=4-x^2$ и $y=x+2$.

19*. Вычислить площадь фигуры, заключенной между окружностью $y^2+x^2-25=0$ и прямыми $2y=5\sqrt{2}$, $2y=5$.

20*. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=2\cos x$ и отрезком оси абсцисс от $x=0$ до $x=2\pi$.

21*. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами $y_1=x^2$ и $y_2=\sqrt{x}$.

22*. Вычислить площадь фигуры, заключенной между прямой $y=-x$ и графиком функции $y=2x-x^2$. Построить чертеж.

ПРИЛОЖЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА К РЕШЕНИЮ ФИЗИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

При решении задач этого раздела используются следующие формулы.

Работа, совершаемая переменной силой F.

Работа A, совершаемая силой $\overline{F}(S)$ в процессе движения, вычисляется по формуле

$$A=\int_a^b F(S)\,ds.$$

Давление жидкости.

Сила давления жидкости F на пластинку вычисляется по формуле

$$F=\rho g\int\limits_{x_0}^{x_1} xy\,dx,$$

где ρ — плотность жидкости, x_0 и x_1 — пределы интегрирования. g — ускорение свободного падения, x, y — стороны пластины.

Путь, пройденный телом.

Путь s, пройденный телом, движущимся со скоростью $v(t)$, вычисляется по формуле

$$s=\int_a^b v(t)\,dt.$$

Пример 1. Сила в 196,2 H растягивает пружину на 12 см. Какую работу она производит?

Решение. Длину выразим в СИ: $x=12$ см $=0,12$ м.

По закону Гука сила, действующая на пружину, пропорциональна растяжению (или сжатию) пружины: $F=kx$, где x — величина растяжения, k — коэффициент пропорциональности, зависящей от свойств пружины. Подставив данные задачи, получим $196,2=k\cdot 0,12$, откуда $k=\frac{196,2}{0,12}$, следовательно,

$$F=kx=\frac{196,2}{0,12}x.$$

Подставив в формулу для работы значения k, a, b, получим:

$$A=\int_0^{0,12}\frac{196,2}{0,12}x\,dx=\frac{196,2}{0,12}\int_0^{0,12}x\,dx=\frac{196,2}{0,12}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0,12}=11,772\text{ (Дж)}.$$

Пример 2*. При растяжении пружины на 5 см затрачена работа в 29,43 Дж. На сколько растянется пружина, если затратить работу в 1 Дж?

Решение. Выразим все величины в единицах СИ: $x_0=0$,

$$x_1=0,05\text{ м},\quad A_1=29,43\text{ Дж},\quad A_2=9,81\text{ Дж}.$$

Подставляя соответствующие данные в формулу для работы, получим:

$$29,43=k\Big|_0^{0,05}x\,dx,\quad 29,43=\frac{kx^2}{2}\Big|_0^{0,05},\quad 29,43=k\frac{0,0025}{2},$$

откуда

$$k=23\,544,\text{ далее, } A_2=k\int_0^{x_2}x\,dx.$$

Подставим данные в эту формулу:

$$9,81=23\,544\int_0^{x_2}x\,dx,\quad 9,81=23544\frac{x^2}{2}\Big|_0^{x_2},$$

$$x_2^2=\frac{9,81\cdot 2}{23\,544}=0,000833,\quad x_2=\sqrt{0,000833}=0,0287\text{ (м)}.$$

Пример 3. Пластинка в виде треугольника, основание которого равно 4 см, а высота 3 см, погружена вертикально в воду. Найти давление воды на эту пластинку, если ее вершина лежит на поверхности воды.

Решение. По условию задачи $a=0$, так как вершина пластинки лежит на поверхности воды, $b=0{,}03$ м, основание треугольника равно 0,04 м, плотность воды $\rho=9810$ кг/м³.

Из подобия треугольников DBF и ABC (рис. 63):

$$\frac{DF}{AC}=\frac{DK}{BE}, \quad \text{или} \quad \frac{y}{0{,}04}=\frac{x}{0{,}03},$$

следовательно,

$$y=\frac{0{,}04}{0{,}03}x=\frac{4}{3}x.$$

Подставив данные в формулу для P, получим:

$$p=9810\int_0^{0{,}03}\frac{4}{3}x^2\,dx=\frac{9810}{3}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^{0{,}03}=0{,}11772.$$

Пример 4. Газ заключен в цилиндр с подвижным поршнем. Вычислить работу, совершаемую газом при увеличении высоты части цилиндра, заключающей газ, от значения, равного h_1, до значения, равного h_2 (температура газа t постоянна).

Решение. Допустим, что радиус цилиндра (рис. 64) равен r. Обозначив через h высоту цилиндра и через $V=V(r)$ его объем, получим:

$$V=\pi r^2 h.$$

Найдем силу $F(h)$, действующую на поршень. Для этого воспользуемся законом Бойля—Мариотта

$$pV=k,$$

где V — объем газа, p — давление, а $k=p_0v_0$ — постоянная величина.

Находим, что давление газа $p=\frac{k}{v}$. Площадь поршня равна πr^2. Следовательно, сила, с которой газ давит на поршень, равна $\frac{\pi\cdot r^2\cdot k}{V}$. Поставив в это равенство вместо V его значение, получим:

$$\pi\cdot r^2 p=\frac{\pi r^2 k}{\pi r^2 h}=\frac{k}{h}.$$

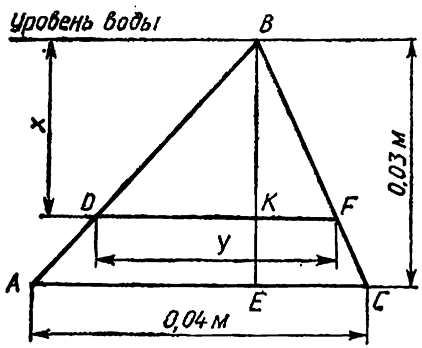

Рис. 63

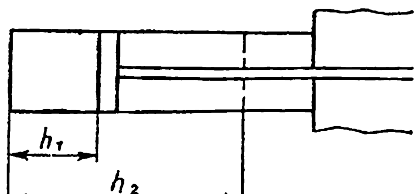

Рис. 64

Тогда $F(h)=\frac{k}{h}$.

$$A=\int_{h_1}^{h_2}\frac{k}{h}dh=k\int_{h_1}^{h_2}\frac{dh}{h}=k\ln h\Big|_{h_1}^{h_2}=k(\ln h_2-\ln h_1)=k\ln\frac{h_2}{h_1}.$$

Пример 5. Реактивный самолет в течение 20 с увеличил свою скорость от 240 до 720 км/ч. Считая движение равноускоренным, найти ускорение и путь, пройденный самолетом за это время.

Решение. Из условия задачи следует, что

$$v_0=\frac{240\cdot 1000}{60\cdot 60}=\frac{200}{3}\text{ (м/с)};\quad v_1=\frac{720\cdot 1000}{60\cdot 60}=200\text{ (м/с)}.$$

Скорость равноускоренного движения в зависимости от ускорения a и времени t описывается формулой $v=at+v_0$. Отсюда

$$a=\frac{v-v_0}{t}\approx 6{,}7\text{ (м/с)}.$$

Для нахождения пути, пройденного самолетом, воспользуемся равенством $\frac{ds}{dt}=v$, откуда

$$\frac{ds}{dt}=v_0+at;\quad ds=(v_0+at)\cdot dt;$$

$$s=\int_{t_1}^{t_2}(v_0+at)\cdot dt=\left(v_0t+\frac{at^2}{2}\right)\Big|_{t_1}^{t_2}\approx 2{,}7\cdot 10^3=2{,}7\text{ (км)}.$$

Задачи.

23. Сила в 98,1 Н растягивает пружину на 12 см. Какую работу она производит?

24. Пластинка в форме прямоугольного треугольника, катет которого равен 12 см, является основанием треугольника, а другой катет является высотой пластинки и равен 3 см, вертикально погружен в воду. С какой силой вода давит на эту пластинку, если ее вершина лежит на поверхности воды?

25. Скорость движения тела определяется по формуле

$$v=(3t^2-2t+1).$$

Найти путь, пройденный телом за 10 с от начала движения.

26. Из одной точки два тела одновременно начинают движение: одно со скоростью $v=3t^2+2t$, другое со скоростью $v=2t-1$. На каком расстоянии друг от друга они будут через 10 с, если они движутся по прямой линии в одном направлении?

27. Найти путь, пройденный телом от начала движения до остановки, если скорость его определяется по формуле $v=6t-2t^2$.

28. Тело брошено с земли вертикально вверх. Найти наибольшую высоту подъема тела, если его скорость $v=19{,}6-9{,}8t$.

29. Тело движется прямолинейно со скоростью $v=2t+3$. За сколько секунд оно пройдет путь 88 м, если $s_0=0$?

30*. Шофер автомобиля затормозил в тот момент, когда скорость была равна 36 км/ч. Найти путь, пройденный автомобилем за время от $t_1=2$ с до $t_2=6$ с, если при включенном тормозе автомобиль двигался с ускорением 0,5 м/с^2.

31. Скорость тела, падающего в пустоте с начальной скоростью v_0, вычисляется по формуле $v=v_0+gt$. Вычислить длину пути s, пройденного этим телом за промежуток времени от 0 до T.

32. Пружина растягивается на 6 см под действием силы в 19,62 Н. Какую работу производит эта сила, растягивая пружину на 10 см? Вычислить с точностью до 0,01 Дж.

33. Сила в 19,62 Н достаточна, чтобы растянуть пружину на 2 см. Какую работу нужно совершить, чтобы растянуть пружину до 20 см, если первоначальная ее длина 14 см?

34*. Чтобы растянуть пружину на 2 см, нужно совершить работу, равную 196,2 Дж. На сколько можно растянуть пружину, совершив работу в 784,8 Дж?

35*. Найти силу, с которой вода давит на плотину, имеющую форму трапеции с основаниями 80 м (верхнее), 16 м (нижнее), высотой 8 м. Верхнее основание находится на уровне поверхности воды. Ответ вычислить в тоннах.

36. Найти силу давления на вертикальный прямоугольный затвор шлюза шириной 15 м и глубиной 6 м, если его верхняя грань находится на уровне поверхности воды. Ответ вычислить в тоннах.

37. Диаметр иллюминатора, расположенного на вертикальном борту судна, равен 30 см. Найти силу давления воды на погружённую половину иллюминатора.

38. Вычислить силу давления воды на плотину, имеющую форму трапеции, верхнее основание которой равно 6,4 м, нижнее 4,2 м, а высота 3 м, если вода доходит до верха плотины. Ответ выразить в тоннах.

Глава II

ЗАДАЧИ С ЭКОНОМИЧЕСКИМ СОДЕРЖАНИЕМ

§ 12. ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИИ. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Пример 1. *Стоимость*[1] оборудования авторемонтной мастерской 476 000 р., а годовая *амортизация* 26 000 р. Выразить стоимость оборудования в зависимости от времени x лет работы мастерской, если амортизационное отчисление остается постоянной величиной.

Решение. По условию задачи ежегодно в фонд амортизации отчисляется 26 000 р. Поэтому если x лет — время работы автомастерской, а y рублей — сумма амортизационных отчислений, то через x лет стоимость оборудования автомастерской определяется по формуле

$$y = 476\,000 - 26\,000x.$$

Пример 2. *Издержки производства* на 200 единиц продукции составляют 100 р., а на 2000 единиц — 800 р. Найти графически издержки на производство 600, 1000, 1400 и 1800 единиц продукции, считая, что функция издержек линейна.

Решение. На оси Ox отложим количество произведенной продукции, а на оси Oy — стоимость продукции. График функции пройдет через точки $A(200;\ 100)$ и $B(2000;\ 800)$. Построение выполним в масштабе 1:100, тогда 1 клетка по оси Ox соответствует двум сотням единиц продукции, а 2 клетки по оси Oy — одной сотне рублей. Построим точки A и B и соединим их отрезком прямой (рис. 65). Отложим на оси Ox 6, 10, 14, 18 сотен и через эти точки проведем прямые до пересечения с прямой AB и, опустив из точек пересечения перпендикуляры на ось Oy, найдем издержки ≈ 260 р., ≈ 430 р., ≈ 570 р., ≈ 720 р.

Указание. Ответы будут более точными в том случае, если график функции построить на миллиметровке.

Пример 3. Издержки при перевозке груза двумя видами транспорта вычисляются по формулам

$$y_1 = 100 + 40x, \quad y_2 = 200 + 20x,$$

---

[1] Расшифровку терминов, выделенных курсивом, см. *А. В. Моисеев, К. Ц. Петросян, Н. Н. Пилипенко.* Экономический словарь-справочник. М., 1985.

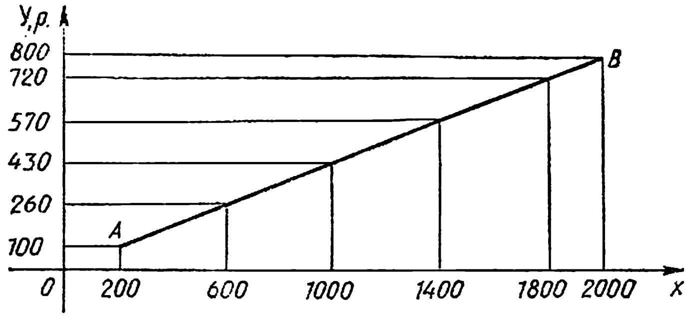

Рис. 65

где x — расстояние перевозок в сотнях километров, а y рублей — транспортные расходы по перевозке груза первым и вторым видами транспорта. Найти, на какие расстояния и каким видом транспорта перевозки груза будут более экономичны.

Решение. На одной координатной плоскости построим графики транспортных расходов (рис. 66).

Известно, что график линейной функции есть прямая линия, а положение прямой определяется двумя точками. Найдем координаты этих точек:

$$y_1 = 100 + 40x, \qquad y_2 = 200 + 20x.$$

x	0	3
y	100	220

x	0	3
y	200	260

Координатами точки пересечения A являются 5 и 300, т. е. издержки по перевозке груза на любые расстояния как первым, так и вторым видом транспорта достаточно просто определяются по величине y из графиков функций. По этим же графикам функций определяется, каким видом транспорта и на какие расстояния перевозки груза будут более экономичными.

Так, если груз нужно перевезти на расстояние менее чем пять сотен километров, то его нужно перевозить первым видом транспорта, а если груз нужно перевезти на расстояние более чем пять сотен километров, то его экономичнее перевезти вторым видом транспорта.

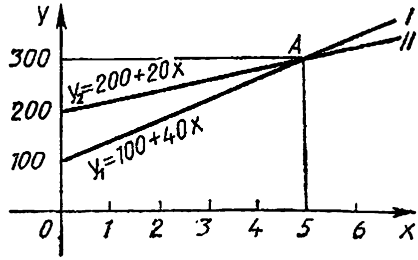

Рис. 66

Задачи.

1. Издержки при перевозке груза двумя разными видами транспорта вычисляются по формулам

$y_1 = 25 + 75x, \qquad y_2 = 250 + 30x,$

где x — расстояние перевозок в сотнях километров, а y — транспортные расходы в рублях. Найти, на какие расстояния и каким видом транспорта экономичнее перевозить груз.

2. Известно, что стоимости перевозок груза тремя видами транспорта вычисляются по формулам

$$y_1 = 100 + 50x, \quad y_2 = 150 + 25x, \quad y_3 = 200 + 16\frac{2}{3}x,$$

где x — расстояние в сотнях километров. Найти графически, каким видом транспорта экономичнее перевозить груз на расстояние менее 200 км и каким — на расстояние более 600 км.

3. Оборудование ремонтной мастерской стоит 71 600 р., а годовая амортизация — 2900 р. Выразить стоимость оборудования в зависимости от времени, если из года в год амортизационное отчисление остается постоянной величиной.

4. Издержки на производство 200 условных единиц некоторой продукции составляют 300 р., а на производство 1000 условных единиц продукции — 1200 р. Вычислить издержки на производство 800 условных единиц продукции, если функция издержек линейна. Решить графически.

5. Издержки при перевозке некоторого груза двумя видами транспорта вычисляются по формулам

$$y_1 = 100 + 25x \text{ и } y_2 = 200 + 5x,$$

где x — расстояние в сотнях километров, а y_1 и y_2 — издержки при перевозке в рублях. Найти графически, на какие расстояния и каким видом транспорта экономичнее перевозить груз.

6*. Издержки при перевозке груза тремя видами транспорта соответственно вычисляются по формулам

$$y_1 = 150 + 50x, \quad y_2 = 250 + 25x \text{ и } y_3 = 350 + 25x,$$

где x — расстояние в сотнях километров, а y_1, y_2 и y_3 — стоимость перевозки в рублях. Графически найти, на какие расстояния и каким видом транспорта перевозить груз экономичнее: а) при использовании всех видов транспорта; б) при использовании второго и третьего видов транспорта; в) при использовании первого и третьего видов транспорта.

7. За 7 ч работы токарь должен был по норме изготовить некоторое количество деталей. Применив изобретенный им новый резец, он стал за час изготовлять на 8 деталей больше, чем полагалось по норме, а потому за 6 ч работы выполнил 1,2 дневной нормы. Найти производительность труда токаря за час с применением нового резца.

8. По плану токарь должен был ежедневно изготовлять по 24 детали. Улучшив технологию производства деталей, он повысил дневную производительность труда на 15 деталей, за 6 дней до срока изготовил сверх плана 21 деталь. Определить: а) сколько деталей изготовил токарь к этому времени; б) какую дополни-

тельную оплату получил токарь, если за каждую обработанную деталь с повышенным качеством ему заплатили на 10 к. больше.

9. Издержки при перевозке груза по железной дороге вычисляют по формуле $y_1 = 150 + 50x$, а издержки при перевозке того же груза водным транспортом — по формуле $y_2 = 250 + 25x$, где x — расстояние перевозок в сотнях километров. Найти, с какого расстояния перевозки водным транспортом будут более экономичными.

10. При строительстве оросительного канала бригада экскаваторщиков должна была по плану ежедневно вынимать 860 м³ грунта. Улучшив технологию производства и организацию труда, бригада повысила дневную производительность труда на 172 м³ и закончила работу на 2 дня раньше срока. За сколько дней по плану бригада должна была закончить работу?

11. Бригада рыболовов для выполнения в срок плана лова должна была ежедневно добывать некоторое количество рыбы. Но из-за плохих метеорологических условий дневная производительность труда снизилась на 10%, и потому бригада выполнила план добычи рыбы на 3 дня позже срока. Найти, за сколько дней бригада должна была выполнить план.

12*. Издержки при перевозке груза пятью разными видами транспорта соответственно вычисляются по формулам

$$y_1 = 100 + 75x, \quad y_2 = 200 + 50x, \quad y_3 = 300 + 25x,$$
$$y_4 = 350 + 16\frac{2}{3}x \text{ и } y_5 = 50 + 100x,$$

где x — расстояние в сотнях километров, а y_1, y_2, y_3, y_4 и y_5 — издержки при перевозке груза в рублях. Найти, каким видом транспорта и на какие расстояния перевозки груза будут экономичнее, если возможно использовать: а) все виды транспорта; б) первый, второй и третий виды транспорта; в) третий и четвертый виды транспорта; г) третий и первый виды транспорта.

13. После трех дней работы комбайнер применил свое новое приспособление и увеличил дневную производительность труда на 30 ц и всего за 11 дней намолотил 17 500 ц пшеницы. Найти дневную производительность труда до и после применения нового приспособления.

14. Из пункта A в пункты B, C, D, E груз можно доставить тремя видами транспорта: водным, железнодорожным и автомобильным. Издержки при перевозке груза соответственно вычисляются по формулам

$$y_{в} = 25 + 25x, \quad y_{ж/д} = 50 + 25x, \quad y_{а} = 75 + 8\frac{1}{3}x,$$

где x — расстояние в сотнях километров, y рублей — стоимость перевозки груза.

Вычислить графически, каким видом транспорта экономичнее доставить груз в пункты B, C, D и E, если расстояния от пункта A до этих пунктов соответственно равны 200, 300, 500 и 900 км

15. Себестоимость 16 деталей одного вида и 20 деталей другого вида 62 р. Если бы себестоимость детали одного вида снизилась на 25%, а второго—на $33\frac{1}{3}\%$, то себестоимость всех этих деталей снизилась бы на 18 р. Найти себестоимость одной детали каждого вида до и после снижения себестоимости.

§ 13. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Пример. На стройке работали две бригады каменщиков из 8 и 10 человек, которые за месяц вместе заработали 3576 р. Улучшив организацию труда, они повысили производительность труда на 24% и 20%. И так как процент повышения зарплаты при этом составляет половину процента повышения производительности труда, то за месяц вместе они заработали на 388 р. 32 к. больше, чем вначале. Найти месячный заработок рабочих первой и второй бригад до и после улучшения организации труда.

Решение. Пусть x—заработок рабочего одной бригады, а y—заработок рабочего другой бригады, тогда $8x+10y=3576$. По условию задачи заработок увеличился соответственно на $\frac{24\%}{2}=12\%$, $\frac{20\%}{2}=10\%$, поэтому второе уравнение имеет вид:

$$8\cdot\frac{12\%}{100\%}x+10\cdot\frac{10\%}{100\%}y=388{,}32, \text{ или } 0{,}96x+y=388{,}32.$$

Объединим полученные уравнения в систему

$$\begin{cases} 8x+10y=3576, \\ 0{,}96x+\quad y=388{,}32. \end{cases}$$

Из второго уравнения найдем y и подставим в первое:

$$y=388{,}32-0{,}96x,\ 8x+\frac{10}{388{,}32}-0{,}96x=3576,\ x=192 \text{ р.},$$
$$y=204 \text{ р.}$$

Следовательно, заработок после повышения производительности труда составит:

рабочего первой бригады 215,04 р.; рабочего второй бригады 224,4 р.

Задачи.

1. Токарь и его ученик за смену изготовили 80 деталей. Применив новый резец своей конструкции, токарь повысил сменную производительность труда на 10%, а его ученик—на 20%, и потому за смену они изготовили 91 деталь. Найти сменную производительность труда до и после применения нового резца.

2. Две бригады, состоящие из 11 и 13 человек, усовершенствовали технологию производства и организацию труда, а потому

производительность труда соответственно возросла на 20 и 12% и обе бригады вместе за смену вместо 545 деталей стали изготовлять 628 деталей. Найти производительность труда каждого рабочего первой и второй бригад за смену до и после повышения производительности труда.

3. На опытной станции с участка пшеницы и участка овса, пораженных сорняком, собрали вместе 2230 кг зерна. После применения ядохимикатов, уничтожающих сорняки, с таких же участков собрали 3716 кг, так как урожай пшеницы повысился на 70%, а урожай овса — на 60%. Найти урожайность пшеницы и овса до и после очистки, если площади участков были по 1 га.

4. К элеватору подано судно с 23 000 т пшеницы двух сортов. Первый сорт содержит 5% сорных примесей, второй — 9%. После очистки получено 21 130 т чистой пшеницы. Определить, сколько пшеницы каждого сорта было на судне.

§ 14. НЕРАВЕНСТВА

Пример 1. Стоимость трактора равна A, а его *капитального ремонта* — r. Установлено, что трактор может работать без ремонта n месяцев, а с ремонтом m месяцев. При каких соотношениях между A, r, n, m затраты ремонта являются рентабельными? При этом нужно учесть, что после ремонта мощность трактора равна мощности нового трактора.

Решение. $\frac{A}{n}$ — средняя стоимость месячной эксплуатации нового трактора;

$(A+r)$ — суммарная стоимость трактора и ремонта;

$\frac{A+r}{m}$ — средняя стоимость месячной эксплуатации трактора после ремонта.

Капитальный ремонт трактора будет рентабельным, т. е. окупит себя, только в том случае, если средняя месячная стоимость эксплуатации трактора после ремонта будет не больше чем средняя стоимость эксплуатации до ремонта. Поэтому получим нестрогое неравенство

$$\frac{A+r}{m} \leqslant \frac{A}{n},$$

откуда

$$r \leqslant \frac{A(m-n)}{n}.$$

Пример 2. Используя результат решения примера 1, выяснить, в каких случаях надо ремонтировать машины, а в каких нет.

а) $A = 1750$ р., $r = 500$ р., $n = 8$ месяцев, $m = 12$ месяцев;
б) $A = 1200$ р., $r = 460$ р., $n = 6$ месяцев, $m = 7$ месяцев;
в) $A = 1500$ р., $r = 600$ р., $n = 8$ месяцев, $m = 13$ месяцев;
г) $A = 2700$ р., $r = 1200$ р., $n = 9$ месяцев, $m = 15$ месяцев.

Решение. Числовые данные в каждом случае подставим в ответ примера $r \leqslant \frac{A}{n}(m-n)$ и определим, когда капитальный ремонт машины будет рентабельным в случаях:

а) 875 р. Так как 500 р. < 875 р., то капитальный ремонт машины будет рентабельным;

б) 200 р. Так как 460 р. > 200 р., то капитальный ремонт машины будет нерентабельным;

в) 937,5 р. Так как 600 р. < 937,5 р., то капитальный ремонт машины будет рентабельным;

г) 1800 р. Так как 1200 р. < 1800 р., то капитальный ремонт машины является рентабельным.

Задачи.

1. Если бы завод производил ежедневно на 20 единиц продукции больше, чем в настоящее время, то в течение 8 дней он произвел бы более 900 единиц продукции, а если бы он ежедневно производил на 12 единиц продукции меньше, то за 10 дней он произвел бы менее 900 единиц. Сколько единиц продукции производит завод в настоящее время?

2. Сколько метров шерстяной нити имеется на складе, если было 10 000 м с точностью до 100 м, а со склада взято 6000 м с точностью до 50 м?

3. Стоимость машины равна A, а стоимость ее капитального ремонта—r. До капитального ремонта машина работает n лет, а с ремонтом—m лет. Как показано при решении примера 1, капитальный ремонт машины является рентабельным, если

$$r \leqslant \frac{A}{n}(m-n).$$

Определить, в каком случае капитальный ремонт является рентабельным:

1) $A=2500$ р., $r=1500$ р., $n=5$ л., $m=9$ л.;
2) $A=1700$ р., $r=1200$ р., $n=6$ л., $m=10$ л.;
3) $A=3500$ р., $r=2000$ р., $n=12$ л., $m=20$ л.;
4) $A=780$ р., $r=500$ р., $n=4$ л., $m=7$ л.;
5) $A=3400$ р., $r=2700$ р., $n=10$ л., $m=18$ л.

4. Определить, в каких случаях надо ремонтировать машины, а в каких случаях нет, если:

1) $A=1200$ р., $r=300$ р., $n=3$ г., $m=4$ г.;
2) $A=2100$ р., $r=800$ р., $n=3$ г., $m=5$ л.;
3) $A=1600$ р., $r=600$ р., $n=4$ г., $m=7$ л.;
4) $A=2100$ р., $r=1500$ р., $n=3$ г., $m=5$ л.;
5) $A=2700$ р., $r=2000$ р., $n=3$ г., $m=5$ л.

5. Определить, в каких случаях надо ремонтировать, а в каких случаях не надо ремонтировать машины, если:

1) $A=2000$ р., $r=800$ р., $n=4$ г., $m=5$ л.;
2) $A=1500$ р., $r=1250$ р., $n=3$ г., $m=5$ л.;

3) $A=3300$ р., $r=1600$ р., $n=3$ г., $m=5$ л.;
4) $A=3600$ р., $r=1800$ р., $n=3$ г., $m=5$ л.;
5) $A=4500$ р., $r=3000$ р., $n=3$ г., $m=5$ л.

§ 15. КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ, СВОДЯЩИЕСЯ К КВАДРАТНЫМ

Пример 1. Бригада медеплавильщиков с целью ускорения плавки дважды усовершенствовала технологию производства за счет: а) увеличения концентрации дутья кислорода и б) повышения температуры дутья. Поэтому дважды равномерно была повышена производительность труда. Найти рост производительности труда каждый раз, если бригада за смену увеличила плавку с 5 до 6,05 т.

Решение. Пусть x—десятичная дробь, показывающая рост производительности труда в процентах после первого усовершенствования технологии. По условию задачи после второго усовершенствования технологии производительность труда также возрастет в x раз. Поэтому имеем уравнение $5000(1+x)^2=6050$.

Разделив обе части уравнения на 50, получим:

$$100(1+x)^2=121,$$

откуда $x=0{,}1$. Следовательно, рост производительности труда в процентах составляет 10%.

Пример 2. В одном колхозе общий удой молока за 1980 г. составил 3500 тыс. л, а в другом—годовой удой молока на 750 тыс. л меньше, хотя коров на 100 голов больше, чем в первом колхозе. Годовой удой молока от одной коровы в первом колхозе на 1 тыс. л больше, чем в другом. Найти: а) поголовье коров в первом и втором колхозах; б) среднегодовой удой молока на одну корову в каждом колхозе; в) себестоимость 1 л молока в каждом колхозе, если стоимость содержания одной коровы с учетом заработка рабочих фермы и всех других расходов составляет 300 р. в год (расходы по реализации молока не учитывать).

Решение. Пусть x—количество коров в первом колхозе, тогда $(x+100)$—количество коров во втором колхозе, $\frac{3500}{x}$ тыс. л—годовой удой молока от одной коровы в первом колхозе, а $\frac{3500-750}{x+100}$ тыс. л—годовой удой молока от одной коровы во втором колхозе.

Тогда из условия задачи следует:

$$\frac{3500}{x}-\frac{2750}{x+100}=1.$$

После простых преобразований получим квадратное уравнение

$$x^2-650x-350\,000=0,$$

откуда $x_1=1000$, $x_2=-350$. Второй корень не удовлетворяет условию задачи, так как поголовье коров не может быть числом отрицательным.

а) Поголовье коров в первом колхозе 1000, а во втором — 1100.

б) Среднегодовой удой молока от одной коровы в первом колхозе 3,5 тыс. л, во втором — 2,5 тыс. л.

в) Себестоимость 1 л молока в первом колхозе 8,5 к., во втором — 12 к.

Пример 3. В 1981 г. один завод выпустил 12 000 машин, а другой завод, где некоторые виды работ были автоматизированы, выпустил 13 800 машин, хотя рабочих было на 350 человек меньше, чем на первом заводе. Известно, что средняя годовая производительность труда одного рабочего на втором заводе на 4 машины больше, чем на первом заводе. Определить: а) количество рабочих на первом и втором заводах; б) среднюю годовую производительность труда одного рабочего на первом и втором заводах; в) *среднемесячную зарплату* рабочего на этих заводах; г) себестоимость одной машины на каждом заводе, если годовой фонд зарплаты рабочих на первом заводе составляет 2,7 млн. р., а прочие расходы — 3,3 млн. р., а на втором заводе соответственно 2,484 млн. р. и 3,302 млн. р., а расходы по реконструкции — 1,4 млн. р. (гарантийный срок автоматических установок 2 года).

Решение. Пусть x — количество рабочих на первом заводе, тогда $(x-350)$ — количество рабочих на втором заводе, $\frac{12\,000}{x}$ машин — средняя годовая производительность труда одного рабочего на первом заводе, а $\frac{13\,800}{x-350}$ машин — средняя годовая производительность труда одного рабочего на втором заводе.

Из условия задачи следует, что

$$\frac{13\,800}{x-350}-\frac{12\,000}{x}=4.$$

Упростив данное уравнение, получим квадратное уравнение

$$x^2-800x-1\,050\,000=0,$$

откуда $x_1=1500$, $x_2=-700$. Второй корень не удовлетворяет условию задачи.

Найдем искомые величины.

а) Количество рабочих на первом заводе 1500, а на втором — 1150 человек.

б) Среднегодовая производительность труда одного рабочего на первом заводе 8 машин, на втором — 12 машин.

в) Среднемесячный заработок рабочих на первом заводе 150 р., на втором — 180 р.

г) Себестоимость машин на первом заводе 500 р., на втором — 470 р.

Задачи.

1 Бригада рабочих должна была к определенному сроку изготовить 500 деталей. Перевыполняя план на 5 деталей ежедневно, бригада за 2 дня до срока перевыполнила плановое задание на 8%. Сколько деталей изготовит бригада к сроку, если будет продолжать работать с той же производительностью труда?

2. На первой базе общий привес всех поросят за сезон (180 дней) составил 405 т, а на второй базе, где были применены аэроионизационные установки, общий привес составил 479,88 т, хотя поросят было на 200 голов меньше. Известно, что суточный привес одного поросенка на второй базе на 120 г больше, чем на первой. Найти: а) количество поросят на этих базах; б) среднесуточный привес одного поросенка на каждой базе; в) себестоимость 1 кг свинины на базах, если общие расходы на одного поросенка на первой базе 142 р., на второй — 146 р., а средний вес поросят, поступающих на базы, 15 кг.

3. Бригада металлургов дважды усовершенствовала технологию плавки. В результате каждый раз производительность труда повышалась на один и тот же процент, и поэтому сменная плавка увеличилась с 10 до 11,025 т. Найти, на сколько процентов увеличивалась производительность труда каждый раз.

4. В первом совхозе общий удой молока составил 820 т, во втором совхозе при одинаковых производственных условиях — 1050 т. Коров в этом совхозе было на 60 голов меньше, чем в первом. Годовой удой молока от коровы во втором совхозе превысил на 1 т годовой удой молока от коровы в первом совхозе. Найти: а) поголовье коров в том и другом совхозе в отдельности и вычислить годовой удой молока на одну корову в каждом из них; б) прибыль, если годовое содержание одной коровы с учетом всех издержек обходится в 400 р., а молоко реализуется по 24 к. за литр.

5. После двух снижений цен на одинаковое число процентов цена 1 м шерстяной ткани снизилась с 20 до 16,2 р. На сколько процентов снижалась каждый раз цена 1 м шерстяной ткани и на сколько процентов за все это время снизилась цена 1 м ткани?

6. После усовершенствования технологии производства радиоаппаратуры цех сборки дважды снизил себестоимость радиоаппаратуры и с 18 р. довел ее до 13 р. На сколько процентов снижалась себестоимость каждый раз, если она снижалась на одинаковое число процентов? Найти *средний заработок* рабочих, если он дважды повышался и процент его повышения составил половину процента снижения себестоимости, а в начале средний заработок был равен 150 р.

7. В одном колхозе общий удой молока за 1983 г. составил 2000 тыс. л, а в другом — годовой удой молока на 50 тыс. л меньше, а коров на 150 голов больше, чем в первом колхозе. Известно, что годовой удой молока от одной коровы в первом колхозе на 1 тыс. л больше, чем во втором. Найти: а) количество коров в первом и втором колхозах; б) среднегодовой удой молока на

одну корову в каждом колхозе; в) себестоимость 1 л молока в каждом колхозе, если стоимость содержания одной коровы с учетом всех расходов 360 р. в год; г) чистую прибыль, если государственные закупочные цены составляют 22 к. за литр.

8. Бригада токарей дважды повышала производительность труда на одинаковое число процентов. Вычислить, на сколько процентов увеличивалась производительность труда каждый раз, если месячная производительность труда бригады повысилась с 5000 до 6050 деталей.

9. Производство овощей в теплицах в 1980 г. в совхозах области составило 4,3 млн. кг. При усовершенствовании агротехнических методов выращивания овощей и организации труда при тех же затратах рабочего труда и с той же площади теплиц урожай овощей в 1981 и в 1982 гг. возрастал равномерно, и поэтому в 1982 г. овощей было собрано 6,192 млн. кг. На сколько процентов повышалась производительность труда каждый год?

10. Бригада рабочих должна была изготовить 8000 деталей в определенный срок. Применив разработанное приспособление, бригада увеличила дневную производительность труда на 50 деталей и поэтому выполнила план на 8 дней раньше срока. Найти, за сколько дней бригада должна была закончить работу и на сколько процентов повысилась производительность труда.

§ 16. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ

Пример 1. Две бригады фрезеровщиков из 8 и 10 человек за смену изготовляли 700 деталей. После повышения производительности труда они стали изготовлять 770 деталей. Найти: а) на сколько процентов увеличилась производительность труда, если каждый рабочий второй бригады до усовершенствования технологии производства за смену изготовлял на 7 деталей больше, чем рабочий первой бригады; б) среднемесячный заработок рабочего до и после усовершенствования технологии производства, если за каждую деталь оплачивают по 22 к., а каждая деталь, изготовленная сверх нормы, оплачивается на 50% больше. Число рабочих дней в месяце принять равным 22.

Решение. Пусть x деталей — сменная производительность труда рабочих первой бригады, тогда $(x+7)$ деталей — сменная производительность труда рабочих второй бригады. Из условия задачи следует, что

$$8x+10(x+7)=700.$$

Предположим, что производительность труда увеличилась на $y\%$. Тогда $\frac{8x}{100}\cdot y$ — число деталей, дополнительно изготовленных рабочими первой бригады за смену после повышения производительности труда, а $\frac{10\cdot(x+7)}{100}\cdot y$ — число деталей, дополнительно изготовленных рабочими второй бригады за смену. Из условия задачи получим:

$$\frac{8x}{100}y+\frac{10\cdot(x+7)}{100}\cdot y=70.$$

Составим систему:

$$\begin{cases} 8x+10\cdot(x+7)=700, \\ \frac{8x}{100}\cdot y+\frac{10\cdot(x+7)}{100}\cdot y=70. \end{cases}$$

Из первого уравнения получим $x=35$. Тогда количество деталей, изготовляемых рабочим второй бригады, составляет 42.

а) Величину повышения производительности труда найдем из второго уравнения: $y=10\%$.

б) Найдем среднемесячный заработок рабочих первой и второй бригад.

До усовершенствования технологии производства:

$35\cdot 22=770$ (дет.) — месячная производительность труда рабочего первой бригады;

$42\cdot 22=924$ (дет.) — месячная производительность труда рабочего второй бригады;

$0{,}22\cdot 770=169$ р. 40 к. — среднемесячный заработок рабочего первой бригады;

$0{,}22\cdot 924=203$ р. 28 к. — среднемесячный заработок рабочего второй бригады.

Производительность труда после усовершенствования технологии производства:

$$\frac{770}{100\%}\cdot 10\%=77 \text{ (дет.) и } \frac{924}{100\%}\cdot 10\%=92 \text{ (дет.)}.$$

Таким образом, месячная производительность труда рабочих первой и второй бригад увеличилась соответственно на 77 деталей и 92 детали.

По условию задачи деталь, произведенная сверх нормы, оплачивается на 50% выше; следовательно, за каждую деталь рабочему платят по 33 к. Вычислим месячный заработок рабочих первой и второй бригад и получим:

рабочего первой бригады 194 р. 81 к.
» второй » 233 р. 64 к.

Задачи.

1. В 1981 г. завод изготовил некоторое количество тракторов, а комбайнов на 10 000 шт. меньше. После реконструкции в 1983 г. выпуск тракторов возрос на 14%, а комбайнов — на 25% и потому общий выпуск машин увеличился на 5300 шт. На реконструкцию завода было израсходовано 3 млн. р. Найти: а) на сколько увеличилась годовая прибыль завода после реконструкции, если себестоимость тракторов и комбайнов снизилась с 600 до 525 р., а *оптовая заводская цена* тех и других 825 р.; б) на сколько процентов увеличился средний заработок рабочих, если фонд зарплаты не изменился, а количество рабочих уменьшилось на 25%.

2. На машиностроительном заводе разработали новый тип детали для генераторов. Из 1350 кг металла стали делать деталей нового типа на 4 больше, чем делали раньше из 1250 кг. Какова масса детали старого и нового типа, если масса детали старого типа на 50 кг больше, чем масса трех деталей нового типа? Вычислить годовую экономию металла, если завод в год делает 10 000 шт. деталей нового типа.

3. Бригада рабочих должна выполнить заказ на стулья за 15 рабочих дней. Если бы рабочих в бригаде было на 5 человек больше, а каждый из них в день делал бы на 1 стул больше, то заказ был бы выполнен за 16 рабочих дней; а если бы рабочих было на 8 человек меньше, но каждый делал бы в день на 1 стул больше, то работу закончили бы за 20 рабочих дней. Сколько заработает один рабочий за 15 рабочих дней, если за каждый стул заплатят по 2 р. 25 к.?

4. На одной откормочной базе содержание и откорм поросят ведется старым методом и привес за сезон составил 181,44 т, а на опытной базе Института животноводства сезонный привес поросят 191,88 т. И количество поросят на этой базе на 460 голов меньше. Привес одного поросенка на опытной базе на 30,6 кг больше. Найти: а) количество поросят на этих базах; б) средний дневной привес одного поросенка на каждой базе.

5. На одном заводе в 1972 г. выпустили 7200 машин, а на другом, где работало на 200 человек меньше, за счет введения автоматизации выпустили 10 800 машин. Средняя годовая производительность труда одного рабочего на втором заводе на 9 машин больше, чем на первом. Найти: а) количество рабочих на этих заводах; б) среднюю годовую производительность труда одного рабочего на этих заводах.

6. На авиационном заводе разработали новый тип детали для самолетов. Из 1 т легированного металла стали делать деталей нового типа на 14 больше, чем делали деталей старого типа из 2,2 т. Найти: а) массу деталей старого и нового типов, если две детали нового типа легче одной детали старого типа на 0,04 т; б) экономию металла, если завод производит в год 15 000 деталей нового типа.

7. Конструкторское бюро завода разработало новый тип детали. Из 136 кг металла деталей нового типа стали делать на 9 шт. больше, чем деталей старого типа из 125 кг. Какова масса деталей старого и нового типов, если 4 детали старого типа весят столько, сколько 5 деталей нового типа? Вычислить годовую экономию металла, если за год завод производит 2 500 000 деталей нового типа.

§ 17. ПРОГРЕССИИ

Пример. Рабочий обслуживал 6 автоматических станков, каждый из которых производил 30 деталей в час. Станки последовательно вводились в рабочий режим через каждые 10 мин. Но в течение пяти лет конструкция станков была дважды усовершенствована: в начале производительность была доведена до 36 деталей в час, а потом станки стали вводить в рабочий режим в 2 раза быстрее. Найти: а) производительность труда за смену (7 ч) до усовершенствования и после каждого из двух усовершенствований; б) месячный (22 дня) заработок рабочего до усовершенствования и после каждого из двух усовершенствований, если за каждую деталь в начале оплачивали 0,8 к., после первого усовершенствования — 0,77 к. и 0,75 к. после второго усовершенствования.

Решение. Из условия задачи следует, что число выпускаемых деталей увеличивается по закону арифметической прогрессии, пока станки последовательно вводятся в рабочий режим. До усовершенствования и после первого усовершенствования станки последовательно включаются в рабочий режим за 50 мин, после второго усовершенствования — за 25 мин, поэтому количество выпускаемых деталей можно определить по формуле суммы членов арифметической прогрессии.

Число деталей, выпускавшихся до усовершенствования станков:

$$S_1=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n=105 \text{ дет. за 50 мин.}$$

Число деталей, выпускавшихся после первого усовершенствования станков:

$$S_2=126 \text{ дет. за 50 мин.}$$

Число деталей, выпускавшихся после второго усовершенствования:

$$S_3=126 \text{ дет. за 25 мин.}$$

а) Производительность труда за смену до усовершенствования станков:

$$S_1'=S_1+S=1215 \text{ дет.}$$

Производительность труда за смену после первого усовершенствования станков:

$$S_2'=S_2+S=1458 \text{ дет.}$$

Производительность труда за смену после второго усовершенствования станков:

$$S_3'=S_3+S=1548 \text{ дет.}$$

б) Месячный заработок рабочего (за 22 дня):

$0{,}8$ к. $\cdot 1215 \cdot 22 = 213$ р. 84 к. — до первого усовершенствования станков;

$0{,}77$ к. $\cdot 1458 \cdot 22 = 246$ р. 84 к. — после первого усовершенствования станков;

$0{,}75$ к. $\cdot 1548 \cdot 22 = 255$ р. 42 к. — после второго усовершенствования станков.

Задачи.

1. Рабочий обслуживает 16 ткацких станков, которые работают автоматически. Производительность станка p м/ч. Он пустил первый станок в 8 ч, а каждый следующий — на 5 мин позже. Найти, на сколько рублей рабочий выработал продукции за 2 ч, если себестоимость 1 м ткани равна k рублей.

2. Комсомольско-молодежная бригада строителей решила перечислить в фонд мира 500 р., которые заработает на стройке оросительного канала. В первый день бригада заработала 90 р., а в каждый последующий день она зарабатывала на 5 р. больше, чем в предыдущий. За сколько дней бригада заработает эту сумму?

3. За рытье колодца колхоз оплачивает за первый метр глубины 15 р., а за каждый следующий — на 10 р. больше, чем за предыдущий. Вычислить, сколько рублей колхоз уплатил рабочим за рытье колодца глубиной 10 м.

4. За изготовление и установку первого железобетонного кольца колодца заплатили 10 р., а за каждое следующее кольцо платили на 2 р. больше, чем за предыдущее. На постройку колодца израсходовали 9 колец. Сколько уплатили за постройку колодца?

§ 18. ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЕ

Пример 1. Известно, что прочность балки прямоугольного сечения на горизонтальный изгиб пропорциональна произведению ширины балки на квадрат ее высоты. Вычислить размеры наиболее прочной балки (т. е. отношение ширины балки к высоте ее поперечного сечения), которую нужно изготовить из цилиндрического бревна, если его диаметр равен d линейных единиц (рис. 67).

Решение. Пусть x линейных единиц — ширина поперечного сечения балки, y линейных единиц — высота поперечного сечения. Тогда по теореме Пифагора имеем:

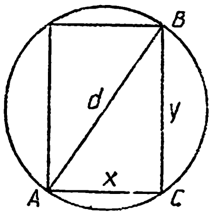

Рис. 67

$$y^2 = d^2 - x^2.$$

Следовательно, прочность балки на изгиб

$$\delta(x) = kxy^2 = kx(d^2 - x^2) = kd^2x - kx^3,$$

где k — коэффициент прочности балки.

Исследуем эту функцию на экстремум (примем $k = 1$). Найдем производную

$$F'_x = (d^2x - x^3)' = d^2 - 3x^2.$$

Решим уравнение

$$F'(x)=0.$$

$d^2-3x^2=0$, откуда $x_1=\frac{d}{\sqrt{3}}$ и $x_2=-\frac{d}{\sqrt{3}}$.

Второй корень не удовлетворяет условию задачи, так как ширина балки не может быть отрицательна.

Найдем экстремум при $x=\frac{d}{\sqrt{3}}$.

Пусть $x=\frac{d}{2}$, тогда $F'_x>0$; пусть $x=\frac{d}{3}$, тогда $F'(x)<0$. Следовательно, при $x=\frac{d}{\sqrt{3}}$ балка имеет максимальную прочность.

Найдем отношение ширины к высоте для балки, наиболее прочной на горизонтальный изгиб. Так как высота поперечного сечения балки $y=\sqrt{d^2-x^2}=\frac{d\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ линейных единиц, то $x:y=$
$=\frac{d}{\sqrt{3}}:\frac{d\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=1:\sqrt{2}\approx 1:1,4=5:7.$

Следовательно, наиболее прочной балкой на горизонтальный изгиб будет та, у которой отношение ширины к высоте поперечного сечения равно 5:7.

Пример 2. (Дополнение к примеру 1.)

Допустим, что для получения проектного запаса прочности при неправильной укладке израсходовали 2100 балок. Вычислить экономию средств за счет правильной укладки балок, если стоимость одной балки 2 р. 85 к.

Решение. Найдем расход средств при неправильной укладке балок:

$$P=2{,}85\cdot 2100=5985 \text{ р.},$$

Найдем количество балок при правильной укладке балок ($k=1$):

а) $S_1=yx^2\cdot 2100=7\cdot 5^2\cdot 2100$ (при неправильной укладке);

б) $S_2=xy^2\cdot n=5\cdot 7^2\cdot n$, где n — количество балок при правильной укладке;

в) но $S_1=S_2$. Так как прочность должна быть одна и та же, следовательно, $7\cdot 5^2\cdot 2100=5\cdot 7^2 n$, откуда $n=\frac{7\cdot 5^2\cdot 2100}{5\cdot 7^2}=1500$ штук, следовательно, экономия средств равна:

$$5985-2{,}85\cdot 1500=5985-4275=1710 \text{ р.}$$

Задачи.

1. Из квадратных кусков листового железа со стороной a изготовляют коробки без крышек, вырезая по углам четыре квадратика так, чтобы из оставшейся части после сгибания изготовить коробки наибольшего объема. Каковы должны быть размеры сторон вырезаемых квадратиков? (Рис. 68.)

2. Внутреннюю поверхность резервуара емкостью 4 м^3 с квадратным основанием, открытого сверху, нужно покрыть оловом.

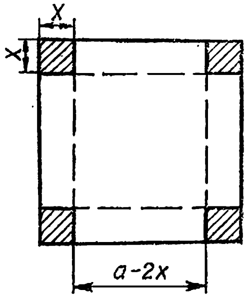

Рис. 68

Каков должен быть размер резервуара, чтобы израсходовать минимальное количество олова? Толщиной стенок пренебречь.

3. Под экспериментальные посадки ценных культур решили огородить участок прямоугольной формы длиной 144 м и шириной 24 м, а затем разделить его пополам перпендикулярно длине. Но с целью экономии средств на постройку забора решили найти наиболее выгодный размер участка. Найти длину и ширину нового участка такой же площади и экономию средств, если 1 погонный метр забора стоит 2 р. 25 к.

4. Стоимость топлива, необходимого для движения океанского танкера, пропорциональна кубу его скорости и составляет 10 р. в час при скорости 10 узлов[1]. Все другие виды расходов составляют 40 р. в час. Найти экономию средств при движении с наиболее выгодной скоростью, если до порта назначения 1000 м. миль.

5. Под посевы элитных культур выделили земельный участок прямоугольной формы площадью 3,24 га и вдоль всей границы окопали рвом. Найти размер участка, чтобы стоимость рва была наименьшей. Вычислить стоимость рва, если погонный метр его обходится в 50 к.

6. Земельный участок прямоугольной формы, расположенный вдоль прямого берега реки, нужно огородить с трех сторон изгородью. Вычислить минимальную стоимость изгороди, если погонный метр ее обходится в 1 р., а площадь земельного участка равна 4,5 га.

7. Стоимость топлива, необходимого для движения океанского пассажирского судна, пропорциональна кубу его скорости и составляет 20 р. в час при скорости 10 узлов. Все другие виды расходов составляют 50 р. в час. Найти наиболее экономичную скорость движения и вычислить дополнительную прибыль за рейс в 4000 морских миль. Экономичную скорость вычислить с точностью до 0,1 узла.

8. Прямоугольный участок земли в 90 000 м^2 нужно окопать вдоль всей границы рвом. Каков должен быть размер участка, чтобы израсходовать минимум средств на окопку рва?

9. Требуется построить канал, имеющий в сечении форму равнобедренной трапеции, основание и боковые стороны которого имеют по 8 м. Какова должна быть ширина канала, чтобы он вмещал наибольшее количество воды?

10. Какой нужно взять размер цилиндрического сосуда емкостью π м^3, открытого сверху, чтобы на его изготовление потребовалось наименьшее количество материала?

11*. Расход угля в час моторным ботом составляет

[1] Узел равен 1852 м/ч.

$z=0{,}3+0{,}001v^3$, где v—скорость катера. Найти наиболее экономичную скорость катера.

12*. Требуется изготовить открытый цилиндрический резервуар заданного объема V. Стоимость материала, из которого делается его дно, в n раз больше стоимости материала, из которого делается боковая стенка. При каких соотношениях высоты резервуара и радиуса его основания стоимость резервуара будет наименьшей?

13. Функция полных издержек производства имеет вид $k=x^3-6x^2+15x$, где x—объем производства продукции в условных единицах для данного производства. Определить, при каком объеме производства продукции средние издержки имеют наименьшее значение.

14. Резервуар для перевозки жидкостей имеет форму цилиндра объемом V. Каков должен быть размер цилиндра, чтобы стоимость материала, использованного для его изготовления, была минимальной?

15. Из отходов основного вида производства, представляющих листовое железо прямоугольной формы со сторонами 80 и 50 см, делают открытые сверху ящики наибольшего объема, вырезая по углам равные квадратики и затем загибая жесть, чтобы образовать боковые стенки. Каковы должны быть стороны вырезаемых квадратиков?

16. Известно, что расход топлива пропорционален кубу скорости судна и составляет 22 р. в час при скорости 10 узлов. Содержание экипажа и амортизационные отчисления составляют 110 р. в час. Найти наиболее экономичную скорость равномерного движения и вычислить дополнительную *прибыль*, если известно, что расстояние до порта назначения 1500 морских миль.

17*. Требуется покрасить цинковыми белилами наружную поверхность резервуара цилиндрической формы объемом 785 м^3. При каком размере резервуара расходуется минимальное количество краски? Вычислить стоимость покраски резервуара, если стоимость краски и покраски 1 м^2 стоит 60 к.

18*. Имеется N одинаковых электрических элементов. Из них можно несколькими способами составить батарею, соединяя по n элементов последовательно, а затем полученные группы $\left(\text{числом } \frac{N}{n}\right)$ параллельно. Сила тока, даваемого такой батареей, определяется формулой

$$I=\frac{NnE}{NR+n^2R_1},$$

где E—э. д. с. одного элемента, R_1—его внутреннее сопротивление, а R—внешнее сопротивление. При каком числе n батарея даст ток наибольшей силы? (Рис. 69.)

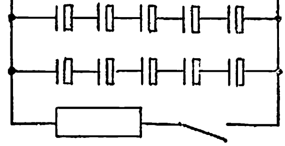

Рис. 69

§ 19. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Рассмотрим приложения определенного интеграла к решению математических задач с экономическим содержанием.

1. Продукция, произведенная рабочим в интервале времени от a до b часов рабочего дня, вычисляется по формуле

$$y=\int_a^b f(x)\,dx, \qquad (1)$$

где $f(x)$ — производительность труда рабочего в момент времени x, отсчитываемый от начала рабочего дня.

2. Количество товара, поступающего на склад в промежутке времени от a до b часов, вычисляется по формуле (1), где $f(x)$ — среднее количество товара, поступающего на склад за единицу времени.

3. Расход электроэнергии в течение времени от a до b часов вычисляется по формуле (1), где $f(x)$ — нагрузка на электростанцию в киловатт-часах (т. е. средний расход электроэнергии за единицу времени), а x — число часов, отсчитываемое от начала суток.

4. Объем дохода, полученного за t лет при постоянном годовом доходе, равном N и удельной норме процента, равной i, определяется по формуле

$$y=\int_0^t Ne^{-it}\,dt=\frac{N}{i}(1-e^{-it}).$$

Пример 1. Дневная производительность труда (за 7 рабочих ч) рабочего машиностроительного завода описывается функцией $y=-0{,}09t^2+0{,}28t+10{,}06$, где t — время в часах, y — количество продукции. Сколько продукции производит рабочий за 1 год (260 рабочих дней)?

Решение. Найдем количество продукции за 1 рабочий день:

$$\int_0^7 (-0{,}09t^2+0{,}28t+10{,}06)\,dt=$$

$$=[-0{,}03t^3+0{,}14t^2+10{,}06t]_0^7=66{,}99 \text{ (ед. продукции)}.$$

За 1 год будет произведено $66{,}99\cdot 260=17\,417$ (ед. продукции).

Пример 2. Поступление товара на склад определяется функцией $v_1=75-0{,}5x+0{,}008x^2$, а отпуск товара торгующим организациям определяется функцией $v_2=60-0{,}6x+0{,}004x^2$, где x — число рабочих дней склада. Найти запас товара, который образовался за 60 рабочих дней.

Решение. Скорость роста запаса товара на складе в момент времени x

$$v_{\text{зап}}=v_1-v_2=15+0{,}1x+0{,}004x^2.$$

Тогда запас товара за 60 дней

$$Q_{зап}=\int_0^{60}(15+0,1x+0,004x^2)\,dx=$$

$$=\left[15x+\frac{0,1x^2}{2}+\frac{0,004x^3}{3}\right]_0^{60}=1368 \text{ (ед. товара)}.$$

Пример 3. Радиозавод выпускает в год 31 000 радиоприемников, и каждый последующий год выпуск радиоприемников увеличивается на 500 шт. Определить сумму амортизационных отчислений за 10 лет при норме амортизации, равной 1% от себестоимости выпускаемой продукции. Себестоимость одного радиоприемника 50 р.

Решение. Из условия задачи следует, что выпуск радиоприемников описывается функцией $y=31\,000+500x$, где x — время в годах. Тогда объем выпуска v этой продукции за 10 лет

$$v=\int_0^{10}(31\,000+500x)\,dx.$$

Амортизационные отчисления равны:

$$\int_0^{10}\frac{1\%\cdot 50}{100\%}(31\,000+500x)\,dx=0,5\left[31\,000x+500\frac{x^2}{2}\right]_0^{10}=167\,500 \text{ (р.)}.$$

Задачи.

1. Сменная производительность труда бригады рабочих описывается функцией $y=-0,0033t^2-0,08t+20,96$, где t — время в часах. Определить объем выпуска продукции в течение года (за 240 рабочих дней), если смена длится 7 ч.

Вычислить прибыль, если заводская оптовая цена единицы продукции равна 200 р., ее себестоимость — 100 р., а количество бригад — 10.

2. Потребление электроэнергии (в кВт) городскими предприятиями и населением города с 8 до 18 ч приближенно описывается функцией $y=10\,000-8t+15t^2$, где t — время в часах. Вычислить стоимость электроэнергии, потребляемой городом, если стоимость 1 кВт/ч равна 4 к.

3. Поступление товара на склад описывается функцией $v=0,006t^2-0,3t+75$, а реализация этих товаров торгующей организацией описывается функцией $v_2=0,003t^2-0,4t+56$, где t — количество дней. Определить запас товара в условных единицах по истечении 60 рабочих дней, если исходного товара на складе не было.

4. Завод выпускает 40 000 единиц в год определенного вида продукции, а каждый последующий год выпуск продукции непрерывно увеличивается на 1000 единиц. Определить сумму амортизационных отчислений за 10 лет при норме амортизации, равной 1,2% от себестоимости выпускаемой продукции, если себестоимость одной единицы продукции 120 р.

§ 20. СТЕПЕННАЯ, ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ

Накопление.

Предположим, что сберегательная касса выплачивает в год $P\%$ дохода. Обозначим отношение $\frac{P}{100\%}$ буквой i.

Если проценты от средств добавляются к исходной сумме, то говорят о накоплении суммы. При этом накопление суммы происходит простым и сложным процентом.

Простые проценты.

Если сумма начального вклада равна K, то простые проценты за n лет составят $K\cdot ni$, а сумма выплаты

$$K_n = K + K\cdot ni = K(1+ni).$$

Пример 1. Допустим, что колхоз в Госбанке взял в кредит 250 000 р. сроком на 5 лет под 3 простых процента. Определить, сколько рублей через 5 лет колхоз должен выплатить Госбанку.

Решение.

$$K_5 = 25\,000\left(1+\frac{5\cdot 3\%}{100\%}\right) = 287\,500 \text{ (р.)}.$$

Пример 2. Определить, в течение скольких лет процент от суммы средств $K = 20\,000$ р. под простые проценты при норме 5% годовых составит 5000 р.

Решение.

$$n = \frac{K_n - K}{K_i} = \frac{5\,000}{20\,000\cdot 0{,}05} = 5 \text{ (лет)}.$$

Сложные проценты.

Проценты называются сложными в том случае, когда начисление на вклад банком ведется не от суммы первоначального вклада, а с учетом предыдущих процентных накоплений.

Пусть K — начальный денежный вклад. Тогда после 1-го года вклад будет равен $K_1 = K + Ki = K(1+i)$, после 2-го года — $K_2 = K_1 + K_1 i = K(1+i)\cdot(1+i) = K(1+i)^2$, а после n-го года — $K_n = K_{n-1} - K_{n-1}i = K_{n-1}(1+i) = K(1+i)^n$. Выражение $1+i = 1 + \frac{P}{100} = r$ называется коэффициентом сложного процента. Следовательно,

$$K_n = Kr^n.$$

Пример 3. Коллектив садоводов «Рассвет» сделал вклад в сберкассу 50 000 р. Определить, какую сумму выплатит сберегательная касса по истечении 10 лет при годовом доходе $P = 3\%$.

Решение. Из условия задачи $K = 50\,000$ р., $P = 3\%$, $n = 10$ лет. Найдем коэффициент сложного процента:

$$r = 1 + i = 1 + \frac{P}{100} = 1 + \frac{3}{100} = 1{,}03.$$

Следовательно, $K_{10} = 50\,000\cdot 1{,}03^{10} \approx 50\,000\cdot 1{,}3439 \approx 67\,196$ (р.).

Пример 4. За период выполнения пятилетнего плана объем продукции должен возрасти на 85%. Определить средний темп роста.

Решение. Пусть K — объем продукции в начале планового периода, тогда через 5 лет он будет составлять:

$$K_5 = Kr^5.$$

Но

$$K_5 = 1{,}85,$$

следовательно,

$$1{,}85K = Kr^5,$$

откуда

$$r^5 = 1{,}85, \quad r = 1{,}131, \quad i = 0{,}131,$$

поэтому $P = 13{,}1\%$.

Вычисление количества лет при сложных процентах.

Положим, что известны K_n, K и P и нужно найти n.

Известно, что $K_n = Kr^n$. Логарифмируя это выражение, получим $\lg K_n = \lg K + n \lg r$, откуда $n \lg r = \lg K_n - \lg K$, следовательно, $n = \frac{\lg K_n - \lg K}{\lg r}$, $\lg r = \frac{\lg K_n - \lg K}{n}$, откуда найдем r.

Вычисление накопления, если процент добавляется m раз в году.

В этом случае накопление за n лет от вклада K вычисляется по формуле

$$K_n = K\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn}.$$

Пример 5. Кооператив под сложные проценты (2%) положил в сберкассу 30 000 р. сроком на $n = 3$ года. Определить конечную сумму, если проценты начисляются в конце каждого полугодия.

Решение. Известно, что $K = 30\,000$ р., $i = 0{,}02$, $m = 2$, $n = 3$. Следовательно, $K_3 = 30\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}02}{2}\right)^{2 \cdot 3} \approx 31\,845$ р.

Непрерывное начисление процентов.

Если начисление происходит непрерывно, т. е. $m \to \infty$, то формула $K_n = \lim\limits_{m\to\infty} K\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn} = K \lim\limits_{m\to\infty}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{mn}$ примет вид $K_n = Ke^{ni}$, где n — время в годах, $i = \frac{P\%}{100\%}$.

Пример 6. Определить конечную сумму для начальной суммы вклада 10 000 р., вложенной под сложные проценты $P = 3\%$, если проценты начисляются непрерывно в течение 5 лет.

Решение. Имеем:

$$K_5 = 10\,000\, e^{5 \cdot 0{,}03} \approx 11\,618{,}3 \text{ (р.)}.$$

Накопление от вклада одинаковых сумм через равные интервалы.

Если через определенные равные промежутки в сберкассу (банк) вносится некоторая постоянная сумма K (периодические взносы) под сложные проценты при норме $P\%$, то накопление вычисляется по формуле

$$A=\frac{Kr(r^n-1)}{r-1}, \text{ где } r=1+\frac{P}{100}.$$

Пример 7. Определить, какая сумма накопится через 10 лет, если ежегодный периодический взнос составляет 3000 р., а ставка сложного процента равняется 5% годовых.

Решение. Из формулы получим:

$$A=\frac{3000\cdot 1{,}05\cdot(1{,}05^{10}-1)}{0{,}05}\approx 39\,621 \text{ (р.)}.$$

Задачи.

1. Бригада токарей, состоящая из 5 рабочих и 7 выпускников ПТУ, за первый месяц совместной работы изготовила деталей себестоимостью на 1200 р. Бригада, систематически улучшая организацию работы, повышала производительность труда ежемесячно в среднем на 1,5%. Определить, на сколько рублей изготовила бригада деталей за 10 месяцев.

2. Определить, в течение скольких лет годовой процент от суммы вклада $K=16\,000$ р. под простые проценты при норме 4% годовых составит 40 000 р.

3. Колхоз взял в кредит под простые 4% годовых 50 000 р. сроком на 6 лет. Определить сумму возврата через 6 лет.

4. Колхоз взял кредит в Госбанке в сумме 128 000 р. под простые проценты. Через 6 лет 3 месяца он рассчитался с Госбанком, уплатив 160 000 р. Определить процентную ставку кредита.

5. Определить, из каких средств, отданных в пользование под простые 6% годовых, через 2 года накопится 784 000 р.

6. Определить, в течение скольких лет процент от суммы средств 75 000 р., отданных под простые проценты при норме 5% годовых, составит 18 500 р.

7. По плану XII пятилетки в СССР в химической и нефтехимической промышленности требуется повысить производительность труда на 28%. Определить среднегодовой темп роста производительности труда в химической и нефтехимической промышленности.

8. По плану развития народного хозяйства в XII пятилетке намечено увеличить выпуск продукции машиностроения и металлообработки на 40% (нижняя граница плана). Определить среднегодовой темп роста производства продукции машиностроения и металлообработки в XII пятилетке.

9. По плану развития народного хозяйства в XII пятилетке намечено увеличить выпуск мяса и мясных полуфабрикатов в расфасованном и упакованном виде в 1,4 раза (нижняя граница плана). Найти среднегодовой темп роста выпуска этой продукции в XII пятилетке.

10. Найти, при какой процентной ставке годовых процент от суммы 9000 р. составит 540 р., если срок начисления процентов равняется девяти месяцам.

11. Совхоз сделал вклад в Госбанк 150 000 р., под сложные 5% годовых. Сколько рублей совхоз будет иметь в Государственном банке через 10 лет?

12. Сумма $K = 100\,000$ р. вложена под сложные проценты из $P = 6\%$ годовых сроком на $n = 3$ года. Определить конечную сумму, если проценты начисляются в конце каждого месяца.

13. Определить конечную сумму для начальной суммы $K = 100\,000$ р., вложенной под сложные проценты из $P = 3\%$, начисляемые непрерывно в течение трех лет.

14. Определить, какая сумма накопится через 10 лет, если периодический ежегодный взнос составляет 45 000 р., а ставка сложного процента равняется 3% годовых.

15. За сколько лет удвоится поголовье крупного рогатого скота в колхозе, если ежегодный прирост скота равен 15%?

Методы исчисления амортизации.

Амортизация — постепенное снижение ценности имущества вследствие его изнашивания. Поэтому необходимо определенную сумму отчислять на ремонт этого имущества или приобретение нового взамен износившегося.

Пусть K_0 — начальная стоимость основных средств, n — период амортизации, K_n — стоимость основных средств по истечении периода амортизации, A — размер годового амортизационного отчисления, K_i — стоимость основных средств в конце i-го года; тогда размер годовых амортизационных отчислений составит:

$$A = \frac{K_0 - K_n}{n}. \tag{1}$$

Стоимость основных средств в конце i-го года составит:

$$K_i = K_0 - iA,$$

а сумма амортизационных отчислений за i лет (амортизационный фонд) составит:

$$S = iA.$$

Задачи.

16. Колхоз взял кредит в размере 240 тыс. р. на 8 лет по ставке сложных процентов, равной 5%. Определить итоговую задолженность.

17. Известно, что население города N возрастает в 4 раза в течение 47 лет. Определить ежегодный прирост населения города в процентах.

18. Определить, сколько рублей следует вкладывать в сберегательную кассу в начале каждого года, чтобы при ставке 4% получить через 3 года 6500 р.

19. Капитальные затраты в области на подъем животноводства в течение пяти лет возросли с 26,256 млн. р. до 61,653 млн. р.

Определить среднегодовой темп прироста капитальных вложений на подъем животноводства в области.

20. Найти, какую сумму колхоз должен внести в Государственный банк, чтобы при ставке 3% годовых через 10 лет получить 500 000 р.

21. Пусть оборудование цеха нового завода стоит $K_0 = 500\,000$ р. Найти амортизационные отчисления линейным методом, если $n=5$ лет, $K_5=50\,000$, $P=3\%$.

22. Пусть оборудование цеха нового завода стоит $K_0 = 1\,000\,000$ р. Найти амортизационные отчисления линейным методом, если $n=5$, $K_5=100\,000$, $P=3\%$.

§ 21. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

В народном хозяйстве часто возникает необходимость определения оптимальных (выгодных) экономических условий решения разных практических задач: рационального использования сырья в промышленности, экономически выгодных условий организации транспортных перевозок, определения наиболее выгодных рационов кормления животных, определения наиболее эффективных возможностей использования станков или другого оборудования и т. д.

При решении практических экономических задач число неизвестных независимых переменных иногда может достигнуть нескольких тысяч. Поэтому решение таких задач стало возможно лишь с помощью использования современной вычислительной техники.

Рассмотрим решения двух простейших задач (транспортная задача, задача об оптимальном использовании сырья), чтобы познакомиться с методами решения задач на линейное программирование.

Пример 1. Автобаза обслуживает откормочные базы A_1 и A_2. Требуется ежесуточно на базу A_1 завозить 40 т, а на базу A_2 — 80 т комбикормов с двух кормофабрик P_1, P_2. Кормофабрика P_1 ежесуточно отпускает 50 т, а P_2—70 т комбикормов. Как нужно спланировать перевозки комбикормов в откормочные базы с кормофабрик, если перевозки 1 т комбикорма с P_1 в A_1 и A_2 соответственно стоят 1,2 и 1,6 р., а с P_2 в A_1 и A_2 соответственно 0,8 и 1 р.

Решение. Пусть x_1 и x_2 тонн—количество комбикорма, ежесуточно доставляемое соответственно в откормочные базы A_1 и A_2 с кормофабрики P_1, а x_3 и x_4 тонн—количество комбикорма, доставляемое соответственно в откормочные базы A_1 и A_2 с кормофабрики P_2.

Тогда из условия задачи получим систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1+x_2=50, \\ x_3+x_4=70, \\ x_1+x_3=40, \\ x_2+x_4=80, \end{cases} \tag{1}$$

где $x_i \geqslant 0$, $i=1, 2, 3, 4$. (2)

Из неравенства (2) следует, что комбикорма возятся в одном направлении — с комбифабрик в откормочные базы.

Из условия задачи следует, что стоимость всех перевозок равна

$$F = 1{,}2x_1 + 1{,}6x_2 + 0{,}8x_3 + x_4. \qquad (3)$$

Условие задачи заключается в том, что нужно найти такие значения x_1, x_2, x_3, x_4 из (1) и (2), при которых стоимость всех перевозок $F = 1{,}2x_1 + 1{,}6x_2 + 0{,}8x_3 + x_4$ будет минимальной.

Решим систему уравнений (1) с четырьмя неизвестными.

Из системы уравнений (1) возьмем первые три из них, так как четвертое является их следствием.

Составим новую систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 50, \\ x_3 + x_4 = 70, \\ x_1 + x_3 = 40. \end{cases} \qquad (4)$$

В этой системе (4) количество уравнений на единицу меньше числа неизвестных. Выразим неизвестные x_2, x_3, x_4 через x_1.

Таким образом, из системы уравнений (4), которая эквивалентна (1), имеем следующие формулы: из первого уравнения $x_2 = 50 - x_1$; из третьего уравнения $x_3 = 40 - x_1$; из второго уравнения $x_4 = 70 - x_3 = 70 - (40 - x_1) = 70 - 40 + x_1 = 30 + x_1$.

Объединив эти уравнения в систему, получим:

$$\begin{cases} x_2 = 50 - x_1, \\ x_3 = 40 - x_1, \\ x_4 = 30 + x_1. \end{cases} \qquad (5)$$

По условию все x_i, $i = 1, 2, 3, 4$, должны быть неотрицательны. Поэтому получим систему неравенств:

$$\begin{cases} x_1 \geqslant 0, \\ 50 - x_1 \geqslant 0, \\ 40 - x_1 \geqslant 0, \\ 30 + x_1 \geqslant 0. \end{cases} \qquad (6)$$

Из этой системы следует, что

$$0 \leqslant x_1 \leqslant 40. \qquad (7)$$

Вычисляя значения x_2, x_3, x_4, задавая x_1 любое значение, удовлетворяющее условию (7), получим один из возможных планов перевозки комбикормов.

Чтобы вычислить стоимость перевозок, нужно значения x_2, x_3, x_4 из равенств (5) подставить в формулу (3):

$$F = 1{,}2x_1 + 1{,}6x_2 + 0{,}8x_3 + x_4 = 142 - 0{,}2x_1.$$

Следовательно, функция стоимости перевозки комбикормов зависит от одной переменной x_1, которую можно выбирать произвольно, пользуясь условием (7). Из условия (7) следует, что стоимость перевозки окажется минимальной, если x_1 будет равен наибольшему значению 40.

Найдем значения x_2, x_3, x_4 по формулам (5):

$$x_2 = 50 - x_1 = 50 - 40 = 10,$$
$$x_3 = 40 - x_1 = 40 - 40 = 0,$$
$$x_4 = 30 + x_1 = 30 + 40 = 70.$$

Таким образом, стоимость перевозки будет минимальной при

$x_1 = 40,$
$x_2 = 10,$
$x_3 = 0,$
$x_4 = 70,$ а именно:

$$F = 142 - 0{,}2 \cdot x_1 = 142 - 0{,}2 \cdot 40 = 134 \text{ р.}$$

Пример 2. Мебельная фабрика выпускает кресла двух типов. На изготовление кресла первого типа расходуется 2 м досок стандартного сечения, 0,8 м² обивочной ткани и 2 человеко-часа, а на изготовление кресла второго типа соответственно 4 м, 1,25 м² обивочной ткани и 1,75 человеко-часа.

Известно, что кресла первого типа стоят 15 р., а кресла второго типа — 20 р.

Найти, какие кресла и в каком количестве нужно выпускать, чтобы стоимость выпускаемой продукции была максимальной, если фабрика имеет в наличии 4400 м досок, 1500 м² обивочной ткани, 3200 человеко-часов рабочего времени.

Решение. Пусть x_1 и x_2 соответственно количество кресел первого и второго типов, выпускаемых мебельной фабрикой. Но запас сырья и трудовые ресурсы ограничены, и числа x_1 и x_2 должны быть целыми. По условию задачи x_1 и x_2 должны удовлетворять следующим неравенствам:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leqslant 4400, \\ \frac{4}{5}x_1 + \frac{5}{4}x_2 \leqslant 1500, \\ 2x_1 + \frac{7}{4}x_2 \leqslant 3200. \end{cases} \tag{1}$$

Из условия задачи следует, что $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$. (2)

Известно, что цена кресла первого типа 15 р., а второго типа 20 р., поэтому стоимость всех кресел определяется функцией $f(x_1;\ x_2) = 15x_1 + 20x_2$.

Эта функция является целевой функцией для данной задачи.

Чтобы найти максимальную стоимость всех кресел, нужно определить пары целых чисел x_1 и x_2, удовлетворяющих неравенствам (1), (2), при которых функция $f(x_1;\ x_2)$ имеет наибольшее значение.

Задачу решим графически в декартовой системе координат. На координатной плоскости найдем множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенствам (1) и (2).

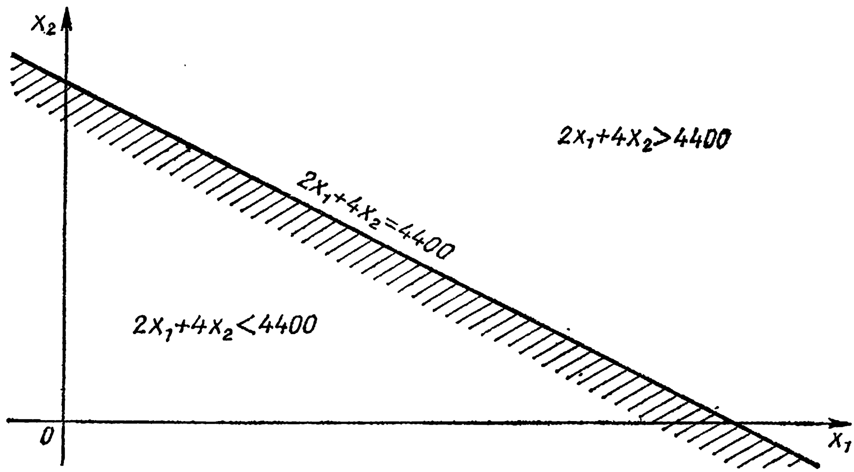

Рис. 70

Вначале на координатной плоскости (рис. 70) найдем прямую, которая удовлетворяет уравнению

$$2x_1 + 4x_2 = 4400. \qquad (3)$$

Эта прямая (график) делит координатную плоскость на две полуплоскости. На плоскости, лежащей ниже прямой, функция $F(x_1;\ x_2) = 2x_1 + 4x_2 - 4400 < 0$, а на полуплоскости, лежащей выше этой прямой, функция $F(x_1;\ x_2) = 2x_1 + 4x_2 - 4400 > 0$.

Следовательно, первое из неравенств системы (1) включает прямую и полуплоскость, расположенную ниже этой прямой, которая заштрихована.

На рисунках 71, 72 даны множества точек, удовлетворяющих второму и третьему неравенствам из системы (1).

Изобразим все эти множества (рис. 70, 71, 72) на одной координатной плоскости и выделим ту часть, которая расположена в первой четверти (рис. 73)[1]. Эти множества вместе с осями координат образуют пятиугольник $OM_1M_2M_3M_4$.

Любая точка $P(x_1;\ x_2)$, принадлежащая этому пятиугольнику, определяет план выпуска продукции при имеющихся запасах сырья и трудовых ресурсов. Но из множества возможных планов выпуска продукции нужно найти оптимальный план, при котором стоимость продукции будет наибольшей. Таким образом, из множества точек пятиугольника нужно найти такую точку P с целочисленными координатами $(x_1;\ x_2)$, при которых функция $f(x_1;\ x_2) = 15x_1 + 20x_2$ (3) будет иметь максимальное значение.

Рассмотрим на координатной плоскости $(x_1;\ x_2)$ линии целевой функции (3):

$$15x_1 + 20x_2 = C. \qquad (4)$$

[1] Далее рекомендуем все графики прямых линий строить на одной координатной плоскости.

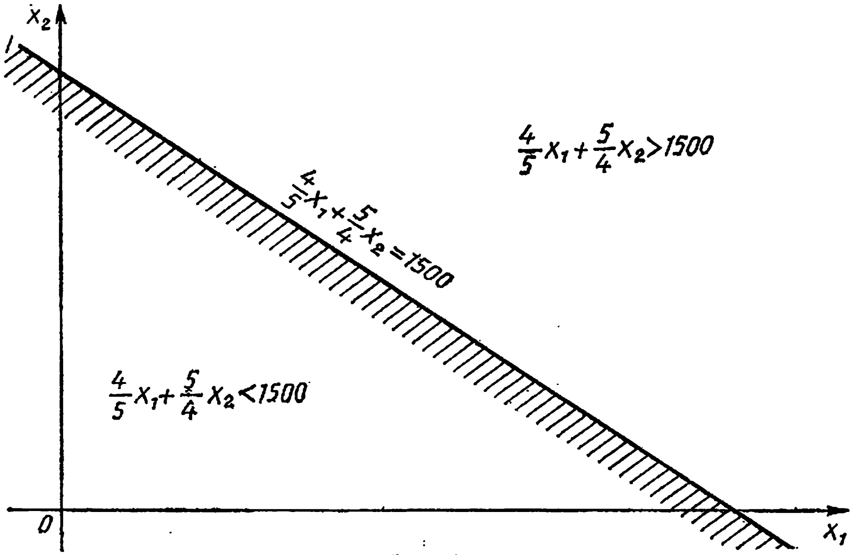
x_2
l
$\frac{4}{5}x_1+\frac{5}{4}x_2>1500$
$\frac{4}{5}x_1+\frac{5}{4}x_2=1500$
$\frac{4}{5}x_1+\frac{5}{4}x_2<1500$
0
x_1

Рис. 71

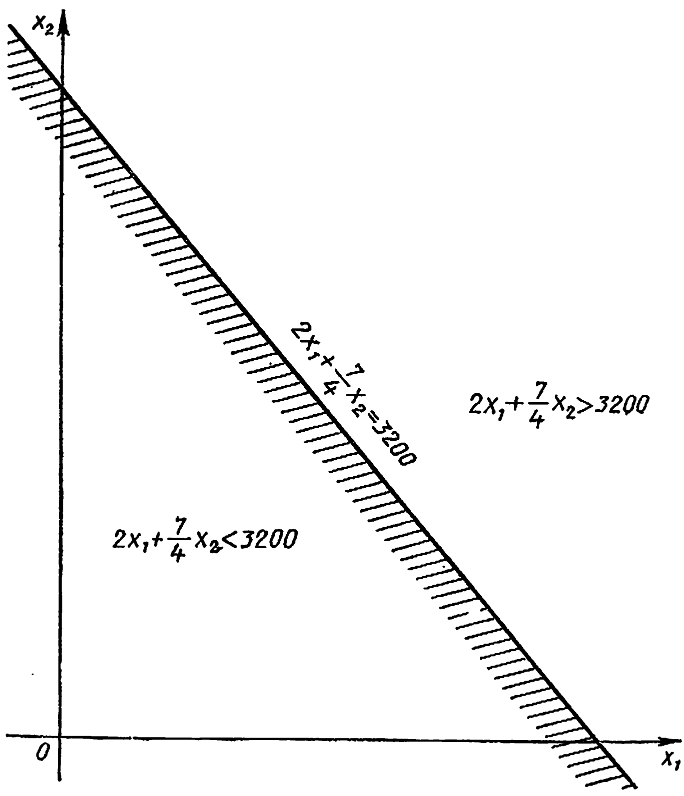
x_2
$2x_1+\frac{7}{4}x_2=3200$
$2x_1+\frac{7}{4}x_2>3200$
$2x_1+\frac{7}{4}x_2<3200$
0
x_1

Рис. 72

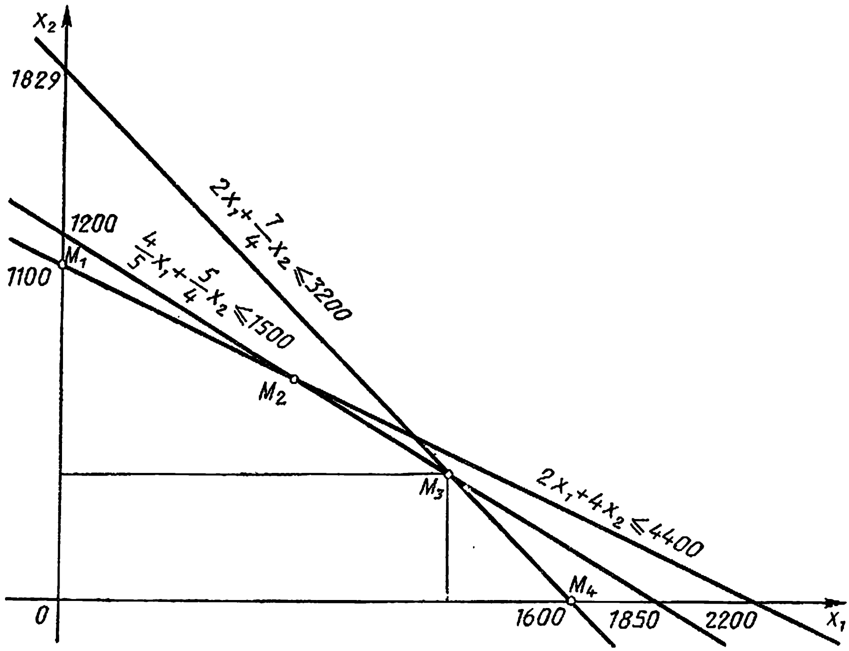

Рис. 73

Это уравнение описывает множество прямых линий, параллельных прямой

$$15x_1+20x_2=0. \tag{5}$$

Если прямую $15x_1+20x_2=0$ перенести параллельно вправо, то параметр C возрастает, влево — убывает.

Свойства функции $f(x_1;\ x_2)=15x_1+20x_2$ тесно связаны с прямыми (4). Действительно, чем дальше от начала координат будет расположена прямая, тем значение функции будет больше. Поэтому для решения задачи используем связь прямой $15x_1+20x_2=0$ с функцией $f(x_1;\ x_2)=15x_1+20x_2$.

Для этого достаточно воспроизвести пятиугольник $OM_1M_2M_3M_4$, координаты множества точек которого являются показателями выпуска продукции. Но из множества планов выпуска продукции нужно найти такой план, реализация которого обеспечит мебельной фабрике выпуск продукции наибольшей стоимости.

Чтобы найти оптимальный план выпуска продукции, проведем прямую в I четверти, параллельную прямой $15x_1+20x_2=0$, имеющую единственную общую точку с пятиугольником. Эта прямая пройдет через точку M_3 (рис. 74). Координаты этой точки $x_1=1250$, $x_2=400$ соответственно являются планом выпуска кресел I и II типов. Определим максимальную стоимость выпускаемой продукции:

$$f(x_1;\ x_2)=15\cdot 1250+20\cdot 400=26\,750\ (\text{р.}).$$

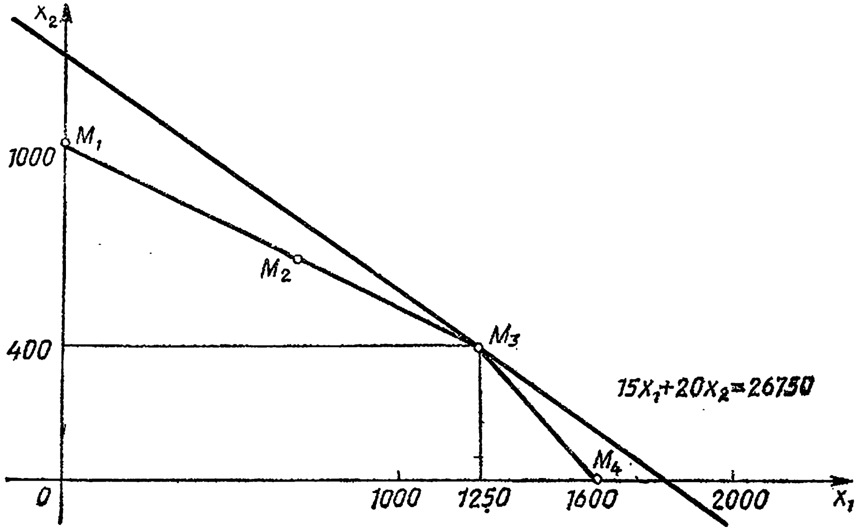

Рис. 74

Таким образом, кресел I типа должны выпустить 1250 шт., а II типа — 400 шт.; максимальная стоимость продукции 26 750 р.

Задачи.

1. Найти абсолютный минимум целевой функции $P=7-x_1-x_2$, заданной системой неравенств:

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2\leqslant 15, \\ x_1+3x_2\leqslant 12, \\ x_1\geqslant 0, \\ x_2\geqslant 0. \end{cases}$$

2. В пунктах A и B находится по 15 вагонов с грузом, которые нужно доставить в пункты C и D. При этом в пункт C нужно доставить 10 вагонов, а в пункт D — 20 вагонов. Известно, что стоимость доставки одного вагона из пункта A в пункт B 100 р., в пункт C 300 р., а из пункта D соответственно 200 и 500 р. Найти минимальную стоимость доставки грузов в пункты C и D.

3. На мебельную фабрику г. Томска для изготовления канцелярских столов и диванов завезли 100 м³ сосны и 130 м³ липы. От производства одного канцелярского стола фабрика получает 15 р. дохода, одного дивана — 20 р. Определить, сколько столов и диванов должна изготовить фабрика из этого материала, чтобы обеспечить наибольший доход, если на изготовление одного канцелярского стола расходуется 0,1 м³ сосны и 0,05 м³ липы, а на один диван — 0,04 м³ сосны и 0,15 м³ липы.

4. Найти минимум целевой функции $P=7-x_1-x_2$, если усло-

вие задачи задано системой неравенств:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \leqslant 2, \\ -2x_1 + x_2 \leqslant 2, \\ x_1 \geqslant 0, \\ x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

5. Ателье шьет женские костюмы и платья из ткани двух видов. На одно платье расходуется ткани одного вида 1,5 м², второго — 0,5 м², а на пошив одного костюма расходуется ткани первого вида 1,6 м², второго — 0,8 м². Найти, сколько платьев и костюмов нужно сшить, чтобы добиться наибольшего дохода, если на складе имеется ткани первого вида 141 м², второго вида — 63 м². При этом известно, что доход мастерской от реализации одного костюма составляет 10 р. и от реализации одного платья — 6 р.

6. В двух пунктах A и B производится некоторая продукция, которая потребляется в пунктах C, D, E. В пункте A производится 250 единиц продукции, а в пункте B — 350 единиц. В пункт C нужно перевезти 150 единиц продукции, в пункт D — 240 единиц и в пункт E — 210 единиц. Стоимость перевозки одной единицы продукции из пунктов A и B в пункт потребления дана в таблице. Найти оптимальный план перевозки продукции.

	C	D	E
A	4	3	5
B	5	6	4

7. В двух пунктах A и B находятся 60 вагонов с грузом, по 30 вагонов в каждом пункте. Эти вагоны нужно доставить в пункты назначения C и D, при этом в пункт C 20 вагонов, а в пункт D 40. Стоимость транспортировки одного вагона из пункта A в пункты C и D соответственно составляет 1 и 3 денежные единицы, а из пункта B соответственно 2 и 5 единиц. Составить оптимальный план транспортировки.

8. Производство выпускает продукцию двух видов (M и H), которая изготовляется из четырех видов сырья: A_1, A_2, A_3, A_4. Расход сырья на единицу продукции дан в таблице.

Вид сырья	Запас сырья	M	H
A_1	19	2	3
A_2	13	2	1
A_3	15	0	3
A_4	18	3	0

Доход предприятия от реализации единицы продукции вида M составляет 7 денежных единиц, а от единицы продукции вида H — 5 денежных единиц. Найти такой план выпуска продукции, при котором предприятие получит наибольший доход. Задачу решить графически.

9. В городе строятся три объекта. Ежесуточно на I объект нужно привозить 200 т, на II—280 т и на III—220 т бетона. Известно, что завод A производит 320 т, завод B—380 т бетона.

Доставка 1 т бетона с завода A на строительные объекты I, II, III соответственно стоит 2, 4, 6 р., а с завода B соответственно 4, 5, 3 р. Найти оптимальный план перевозок бетона с заводов A и B на строительные объекты.

10. Неизвестные x_1 и x_2 удовлетворяют условиям:

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2\leqslant 15, \\ x_1+3x_2\leqslant 12, \\ x_1\geqslant 0, \\ x_2\geqslant 0. \end{cases}$$

Найти минимум функции $P=17-x_1-x_2$ графически.

11. Найти максимум функции $P=x_1+x_2$, если на переменные наложены следующие ограничения:

$$\begin{cases} x_1+4x_2\leqslant 16, \\ 3x_1+x_2\leqslant 15, \\ x_1\geqslant 0, \\ x_2\geqslant 0. \end{cases}$$

12. Найти минимум функции $P=90-x_1-4x_2$, если x_1 и x_2 удовлетворяют условиям:

$$\begin{cases} 5x_1+x_2\leqslant 90, \\ x_1+3x_2\leqslant 60, \\ x_2\leqslant 18, \\ x_1\geqslant 0, \\ x_2\geqslant 0. \end{cases}$$

13. Найти максимальное значение функции $P=3x_1+4x_2$, если x_1 и x_2 удовлетворяют условиям:

$$\begin{cases} 0\leqslant x_1\leqslant 3, \\ 0\leqslant x_2\leqslant 3, \\ x_1+x_2\leqslant 5, \\ x_1-2x_2\leqslant 1. \end{cases}$$

14. Найти максимальное значение функции $P = 2x_1 + x_2$, если x_1 и x_2 удовлетворяют условиям:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leqslant 2, \\ x_1 - 2x_2 \leqslant 1, \\ -x_1 + x_2 \leqslant 2, \\ -2x_1 + x_2 \leqslant 1, \\ x_1 \geqslant 0, \\ x_1 \geqslant 0. \end{cases}$$

15. Откормочная база имеет возможность закупать два вида кормов с одного и того же склада (комбикорм и жмых). Известно, что кормление животных является рациональным, если каждые сутки животному дается 6 единиц вещества P_1, 8 единиц вещества P_2 и 12 единиц вещества P_3. Известно, что единица веса комбикорма содержит 21 единицу вещества P_1, 2 единицы вещества P_2 и 4 единицы вещества P_3 и стоимость ее равна 3 р. А в жмыхе содержится соответственно 3; 2; 2 единицы веществ P_1, P_2, P_3, и стоимость ее равна 2 р. Найти рацион кормления, при котором была бы обеспечена суточная потребность в веществах P_1, P_2, P_3 и при этом стоимость была бы наименьшей.

16. На складе A имеется 10 000 машин, а на складе B — 5 000 машин, которые нужно отправить трем потребителям: первому — 4 000, второму — 8 000, третьему — 3 000 машин. Стоимость перевозки одной машины первому, второму, третьему потребителю со склада A равна соответственно 3 р., 3 р. и 2 р., а со склада B — 6 р., 5 р. и 1 р. Определить такой план перевозок, при котором их общая стоимость минимальна.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К УПРАЖНЕНИЯМ

Глава I

§ 2.

1. 27 л. 2. 16,3 л. 3. 28:9. 4. 70 комбайнов и 160 тракторов. 5. 0,2 м^3; 0,4 м^3; 1,8 м^3. 6. 6 и 10 кг. 7. $\frac{m \cdot n}{m+n}$ дн. 8. 5000 и 15 000; 6000 и 16 200. 9. 3000 и 2000; 3180 и 2080.

§ 3.

1. 150 м^3 цемента и 600 м^3 песка. 2. 12 кг. 3. 80 и 50 дет. 4. 300 р. 5. 20 и 23 дет.; 25 и 30 дет. 6. $m \cdot \frac{(c-a)}{c-b}$ и $m \cdot \frac{(a-b)}{c-b}$, если $c > a > b > 0$ или $0 < c < a < b$.

§ 4.

1. 130 и 100 м. 2. 470 тыс. т. 3. 3%. Указание. За неизвестное принять не процент прироста количества древесины, а дробь, под которой следует подразумевать неизвестную часть, выраженную десятичной дробью. В конечном результате заменить десятичную дробь равным ей числом процентов. 4. За 40 дн.; 25%. 5. 24 m^3. 6. 4%. Указание. См. указание к задаче 3. 7. 5 и 4 А. 8. $\frac{2}{3}$ и 1 га. 9. $\frac{\pm n+2t+\sqrt{4t^2+n^2}}{2}$ ч. 10. 200 столбов и 49 упаковок. 11. 2400 р. 12. 11,25 ц/га. 13. 25%. 14. 50 и 40 А. Указание. $I=\frac{U}{R}$, где I — сила тока, U — напряжение, R — сопротивление. 15. «Коломинский»: 3 т, 350 голов; «Чаинский»: 2 т, 410 голов. 16. $\approx 17,6$ см. 17. 120 и 60 см. 18. 11 и 14 дн. 19. $\approx 27,7$ см.

§ 5.

1. Дороже 1 р. 16 к., но дешевле чем 2 р. 04 к. 2. Более 10 км и менее 16,25 км. 3. Время второго больше. Указание. Если первый шел t часов, тогда его путь равен $\frac{(a+b)t}{2}$ км; время второго $\frac{(a+b)t}{4a}+\frac{(a+b)t}{4b}=\frac{(a+b)^2 t}{4ab}$. Сравнивая t и $\frac{(a+b)^2 t}{4ab}$, найдем, что время второго больше. 4. $43\frac{1}{3} < x < 61\frac{2}{3}$ км. 5. 14 и 15 дет. 6. $2 < x < \infty$ (рис. 75).

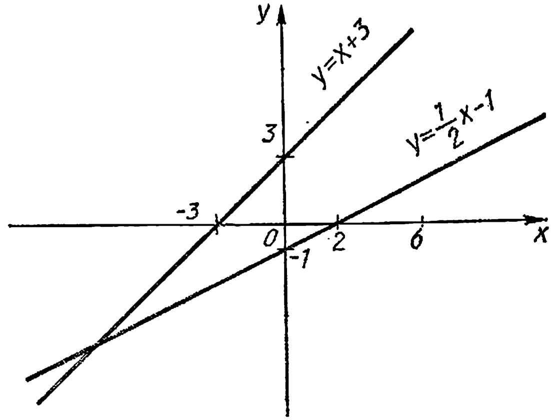

Рис. 75

§ 6.

1. а) На 147 млн. т; б) в 50 раз. 2. 60 и 25 кг. 3. Норма 10 тыс. кирпичей в день, фактически 15 тыс. кирпичей. 4. а) 1,85 и 2,85 млн. т; б) $\approx 54\%$. 5. Первая бригада за 10 дн., вторая — за 15 дн. 6. За 8 ч; трехтонные машины по 2 поездки в час; полуторатонные — по 3 поездки в час. 7. 12 H и 9 H. 8. $\sqrt{mq}$. 10. 4 км. 11. 2 и 14 км/ч.

§ 7.

1. 4,5; 10. 2. 50; 875. 3. 78 125; 97 656. 4. 3; 49 152. 5. $1{,}05\cdot 10^6$. 6. 70,8 тыс. м³. 7. 22 р. м. 8. 208, 176, 144, 112 мм. 9. 1600 м. 10. 2413 га. 11. 46,5 мм рт. ст. 12. 26,7 л. 13. 625 л. 14. 4 с. 15. 13. 16. 2^{72}. 17. 10; 12,5; 16; 20; 25 об/мин. 18. 126 и 160 мм. 22. 129, 151, 176 мм.

§ 8.

1. $\approx 3{,}6\%$. 2. $\approx 3{,}2\%$. 3. $\approx 6{,}8\%$. 4. $\approx 4{,}7\%$. 5. ≈ 14 лет. 6. а) 15 H; $\approx 34{,}2$ H; б) 10 H; в) 2 раза. 7. ≈ 272 кг. 8. $9{,}5\cdot 10^2$ Дж. 9. ≈ 519 м. 10. $\approx 0{,}272$ см/с². 11. ≈ 8350 кг/м³. 12. 1024 м. 13. $t = \dfrac{t_1 \lg \dfrac{m_0}{m}}{\lg 2} = 40$ мин. 14. 30 сут. 15. 6 лет; 12 лет. 16. $1{,}84\cdot 10^6$ м³. 17. $7{,}4\cdot 10^4$ м³.

§ 9.

1. а) 0,3491 рад; б) 1,0123 рад; в) 1,5272 рад. 2. а) 19°; б) 87°42′. 3. 105,84 см. 4. 300°; —864°; 1920°. 5. —6750°; 4500°. 6. 10°, 60°, 375°, 1500°; —30°, —60°, —720°. 7. 11°15′, $\frac{\pi}{16}$. 8. 384 см. 9. а) 0,28; б) 25; 100; 400; 1000. 10. —2700°. 11. 15°; 15′; 15″. 12. а) 90°; б) 12°30′; в) 10′. 13. 2 ч 30 мин 17 с. 14. 65°56′15″. 15. Нет. Должен быть известен и радиус дуги.

16. 217 м. 17. 850,6 H. 18. $a=g\sin\alpha$; $a=1{,}736$ м/с². 19. 18°36'. 20. $x=33°41'$; $y=59°19'$. 21. 34'. 22. 1,62 км. 23. 5°42'. 24. а) 6°1', 11%; б) 5°8', 9%. 25. 131,2 мм. 26. 0,1243. 27. 7 см. 28. 23,7 м. 29. 37,4 м. 30. 16 H; 5,5 H. 31. 40°. 32. а) 2064 H; б) с увеличением φ сила уменьшается. 33. а) $\operatorname{tg}\alpha > k$; б) $\operatorname{tg}\alpha < k$. 34. 440 м. 35. 66,3 т. 36. $4\sqrt{3}$ т, 4 т. 37. ≈ 452 м. 38. 47,6 H, 38,2 H. 39. ≈ 1760 H, ≈ 5740 H. Указание. Разложить силу тяжести по двум направлениям: параллельно и перпендикулярно наклонной плоскости. 40. 2°22'. 42. 3,18 мм; 8 ходов. 43. 65°50'. 44. $\approx 229{,}6$ мм. 45. $\approx 14°3'$. 46. ≈ 162 H. 47. $R=68$ мм, $r=53$ мм. 48. 70:1000. 49. 26 м; 15,5 м. 50. 60,3 м. 51. 0,01; $\approx 34'$. 52. 5°12', 6°22'. 53. а) 2400 H, 1704 H; б) с увеличением угла сила сжатия балки будет увеличиваться. 54. 31°2'. 55. 272 H. 56. $\approx 5{,}7\cdot 10^6$ м³. 58. 255,3 ц. 59. $h+\frac{b\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$. 60. $\frac{b\sin\gamma\sin\alpha}{\sin(\gamma-\alpha)}$. 63. ≈ 226 м. 64. ≈ 1560 га. 65. $\approx 13{,}8$ га. 66. а) $\overline{F}=\overline{F}_1+\overline{F}_2$; б) $\overline{F}=\sqrt{\overline{F}_1^2+\overline{F}_2^2}$. 67. 35 м; 70 м. 68. ≈ 353 м. 69. 1400 м². 70. 130,3 кг, 36°16', 28°8'. 71. 72 H, 74 H. 72. 9,2 м. 73. 53°50', 43°. 74. 390,15 H, 26°34', 23°23'. 75. 6,22 м. 76. $\frac{Fa\sin\beta}{P\sin\alpha+F\sin\beta}$. 77. 319 м. 78. 25 витков. 79. 4 кучи. 80. 975 м³. 81. 10,8 т. 82. 4072 м³. 83. 1007 р. 84. ≈ 43 р. 29 к. 85. 661 лист. 86. 148 196 м³.

§ 10.

1. $\approx 0{,}1$ см². 2. $\approx 10\pi$ см². 3. Увеличится на 104,7 см³. Указание. $S_{\text{сект}}=\frac{\pi\alpha^\circ r}{180^\circ}$. 4. 0,24; 4,2%. 5*. Уменьшится на 43,6 см². 6. $\approx 0{,}1$ см. 7. $\approx 0{,}3$ м³. 8. $\Delta y=0{,}007$. 9. $\approx 0{,}0225$ м. 10. ≈ 8 см³. 11. $\approx 8\pi$ см³. 12. $\approx 0{,}2$ см. 13. $\approx 2\%$. 14. $\approx 0{,}08\%$. 15. $\approx 2\%$. 16. 16π см³. 17. 200×200 м². 18. 10 см. 19. 1:2. Длина нового цеха параллельна заводской стене. 20. $6\cdot 12\cdot 8$ дм³. 21. $2r=h=3\sqrt[3]{4}$ дм. 22. $\approx 1{,}26$ м. 23. 3 дм. 24. $\frac{l}{4}\times\frac{l}{4}$. 25. 154 м/с. 26. Сечение должно быть квадратом.

§ 11.

1. $y=\frac{1}{2}x^2-1$. 3. $y=1{,}3x^2-2x-15{,}5$. 5. $23\frac{1}{6}$ м. 6. $s=\frac{t^3}{3}-t^2+3t+3$. 7. $s=t^3+2t^2-6$. 8. $s=\frac{gt^2}{2}+30t$. 9. $s=5\sin t+12{,}5$. 10. 2820 Дж. 11. 9 кв. ед. 12. $\approx 166{,}7$ кв. ед. Указание. Так как фигура расположена ниже оси Ox, то нужно вычисление площади произвести по модулю. 13. 1152 кв. ед. 14. 16,5 кв. ед. 15. 4,5 кв. ед. 16. $38\frac{2}{3}$ кв. ед. 17. $10\frac{2}{3}$ кв. ед. 18. 4,5 кв. ед. 19. $\frac{25}{12}(\pi+6-3\sqrt{3})$ кв. ед. 20. 8 кв. ед. 21. $\frac{1}{3}$ кв. ед. 22. 4,5 кв. ед. 23. 5,886 Дж. 24. 0,353 H. 25. 9,1 м.

26. 10,1 м. **27.** 9 см. **28.** 19,6 м. **29.** 8 с. **30.** 32 м. **31.** $s = v_0 t + \frac{gt^2}{2}$. **32.** 1,635 Дж. **33.** 1,766 Дж. **34.** 4 см. **35.** 768 т. **36.** 270 т. **37.** $\approx 22{,}1$ *Н*. **38.** 22,2 т.

§ 12.

1. До 500 км — 1-м видом транспорта, более 500 км — 2-м видом транспорта. **2.** До 200 км — 1-м видом транспорта, свыше 600 км — третьим видом транспорта. **3.** $y = 71\,600 - 2900x$. **4.** 975 р. **5.** Всегда выгоднее 1-м видом транспорта. **6.** а) До 400 км — 1-м видом транспорта, свыше 400 км — 2-м; б) всегда выгоднее 2-м видом; в) до 800 км — 1-м, свыше 800 км — 3-м. **7.** 28 дет./ч. **8.** 429 дет., 42 р. 90 к. **9.** До 400 км — железнодорожный, свыше 400 км — водный. **10.** 12 дн. **11.** 27 дн. **12.** а) До 200 км — 5-м; $200 \div 400$ км — 1-м; $400 \div 600$ км — 3-м; свыше 600 км — 4-м; б) до 400 км — 1-м; свыше 400 км — 3-м; в) до 600 км — 3-м; свыше 600 км — 4-м; г) до 400 км — 1-м; свыше 400 км — 3-м. **13.** 1569 и 1599 ц. **14.** До пункта *B* — водным; *C* — водным или автомобильным; *D* — автомобильным; *E* — автомобильным. **15.** До снижения 2 р. и 1 р. 50 к., после — 1 р. 50 к. и 1 р.

§ 13.

1. 50 и 30 дет.; 55 и 36 дет. **2.** 1-я бригада 20 и 24 дет., 2-я — 25 и 28 дет. в смену. **3.** До очистки: пшеницы — 14,8 ц, овса — 7,5 ц; после: 25,16 и 12 ц. **4.** 5000 и 18 000 т.

§ 14.

1. $92{,}5 < x < 102$. **2.** 4000 ± 150. **3.** а), в), г), д) Рентабельно; б) нерентабельно. **4.** а), б), в) Ремонтировать; г), д) не ремонтировать. **5.** а), б) Не ремонтировать; в), г) ремонтировать; д) как желаете.

§ 15.

1. 600 деталей. **2.** а) 4500 и 4300 поросят; б) 0,5 и 0,62 кг; в) 1 р. 35 к. и 1 р. 15 к. **3.** На 5%. **4.** 1-й совхоз: удой — 2 т, поголовье — 410 голов, прибыль — 32 800 р.; 2-й совхоз: удой — 3 т, поголовье — 350 голов, прибыль — 112 000 р. **5.** На 10% каждый; всего на 19%. **6.** На 15%, 173 р. 37 к. **8.** 10%. **9.** 20%; 217 р. 80 к.

§ 16.

1. Прибыль на 840 000 р.; зарплата на $33\frac{1}{3}$%. **2.** 250 и 150 кг, 1000 т. **3.** 135 р. **4.** На первой базе 2100 шт., 1 р. 48 к.; на опытной — 1640 шт., 1 р. 26 к. **6.** а) 200 и 80 кг; б) 1800 т.

§ 17.

2. 5 дн. **3.** 600 р. **4.** 162 р.

§ 18.

1. $\frac{9}{6}$ см. 2. $2\times2\times1$ м^3. 3. 72 и 48 м; 162 р. 4. 237 р. 79 к. 5. 180×180 м^2, 360 р. 6. 600 р. 7. $\approx10{,}71$ узла; 150 р. 47 к. 8. 300×300 м^2. 9. 16 м. 10. $r=h=1$ м. 11. $\approx5{,}3$ км/ч. Указание. Разделив z на v, получим новую функцию $y=\frac{z}{v}=\frac{0{,}3}{v}+$ $+0{,}001v^2$, которая характеризует расход топлива, выраженный в тоннах на 1 км пути. 12. $n=\frac{h}{r}$. Указание. $S_{общ}=n\cdot\pi\cdot r^2+$ $+2\pi r\cdot h$. S—общая стоимость. 13. 3 усл. ед. 14. Высота должна быть равна диаметру основания цилиндра. 15. 10 см. 16. 13,6 узлов; 1564 р. 17. $r=5$ м; $h=10$ м; 282 р. 65 к.

§ 19.

1. 346 518 ед.; прибыль—34 651 848 р. 2. 5022 р. 40 к. 3. 1536 усл. ед. 4. 540 000 р. 5. 560 156 р.

§ 20.

1. 12 843 р. 2. 62,5 лет. 3. 62 000 р. 4. 4%. 5. 700 000 р. 6. ≈5 лет. 7. $\approx5{,}1\%$. 8. $\approx6{,}9\%$. 9. $\approx7{,}1\%$. 10. 8%, 11. 244 334,1 р. 12. 119 668 р. 13. 119 722 р. 14. 594 305 р. 15. ≈5 лет. 16. 354 599 р. 27 к. 17. $\approx3\%$. 19. $\approx18{,}6\%$. 20. 372 047 р.

§ 21.

1. $P_{min}=1$. 2. 9000 р. 3. 754 стола; 615 диванов; доход 23 610 р. Указание. Из условия задачи:

$$\begin{cases} 0{,}1x+0{,}04y\leqslant100, \\ 0{,}05x+0{,}15y\leqslant130, \\ x\geqslant0,\ y\geqslant0. \end{cases}$$

5. 30 платьев и 60 костюмов. Указание. Из условия задачи:

$$\begin{cases} 1{,}5x+1{,}6y<141, \\ 0{,}5x+0{,}8y<63, \\ x\geqslant0,\ y\geqslant0. \end{cases}$$

6. 2300 ед. Более краткий ответ:

A	240	0	10
B	0	210	140

7. 180 ед. Более краткий ответ:

M	0	30
H	20	10

8. Нужно выпустить 5 ед. продукции M и 3 ед. продукции H. 9. С завода A вывозят 200 т, а с завода B—120 т. 10. $P_{min}=11$. 11. $P_{max}=7$. 12. $P_{min}=12$.

16. Со склада A: I—4 000; II—6 000; со склада B: II—2 000, III—3 000.

Указание. По условию задачи:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10\,000 \qquad (1)$$
$$x_4 + x_5 + x_6 = 5\,000 \qquad (2)$$
$$x_1 + x_4 = 4\,000 \qquad (3)$$
$$x_2 + x_5 = 8\,000 \qquad (4)$$
$$x_3 + x_6 = 3\,000 \qquad (5)$$

Целевая функция: $P_{\min} = 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 + 5x_5 + x_6$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Основные направления экономического и социального развития СССР на 1986—1990 годы и на период до 2000 года.— М.: Политиздат, 1986.

2. Комплексная программа химизации народного хозяйства СССР на период до 2000 года.— М.: Политиздат, 1985.

3. Комплексная программа развития производства товаров народного потребления и сферы услуг на 1986—2000 годы.— М.: Политиздат, 1985.

4. *Талызин Н. В.* О государственном плане экономического и социального развития СССР на 1986 год и выполнении плана в 1985 году.— М.: Политиздат, 1985.

5. *Белянов В. А.* и др. Актуальные вопросы политики КПСС.— М.: Политиздат, 1976.

6. *Степаков В. И.* и др. Основы политических знаний.— М.: Политиздат, 1968.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава II

Задачи с экономическим содержанием

Павел Терентьевич Апанасов
Николай Павлович Апанасов

СБОРНИК МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ПРАКТИЧЕСКИМ СОДЕРЖАНИЕМ

Зав. редакцией Р. А. Хабиб
Редактор Н. А. Песнна
Младшие редакторы Т. Н. Клюева, Л. Е. Козырева
Художественный редактор Е. Р. Дашук
Технический редактор Е. С. Юрова
Корректор И. Н. Панкова

ИБ № 10521

Сдано в набор 01.04.87. Подписано к печати 26.08.87. Формат $60\times90^1/_{16}$. Бум. типограф. № 2. Гарнит. Литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 7. Усл. кр.-отт. 7,38. Уч.-изд. л. 6,41. Тираж 60 000 экз. Заказ № 1694. Цена 20 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 129846, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41

Отпечатано с матриц ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени МПО «Первая Образцовая типография» имени А. А. Жданова Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 113054, Москва, Валовая, 28 в областной ордена «Знак Почета» типографии им. Смирнова Смоленского объединения издательств, полиграфии и книжной торговли. 214000, г. Смоленск, проспект им. Ю. Гагарина, 2.

20 к.